Никитин Алексей Антонович
и его коллеги
Тиунов Александр
Савостьянов Антон

МАТАН

Авторы глубоко благодарны Александре Корытовой, Анне Аверченковой, Рамилю Яруллину и Михаилу Ховричеву, а также остальным коллегам, исправившим большое количество опечаток.

Содержание

Часть 1
Аксиоматика множеств действительных чисел

1 Действительные числа

Декартово произведение множеств X и Y

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Множеством вещественных (действительных) чисел $\boxed{\mathbb{R}}$ называют множество элементов, удовлетворяющих аксиомам:

1. **Сложение** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{+}{\mapsto} \mathbb{R}$
   - (a) Существует нейтральный элемент **0**, такой что $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 0 = 0 + x = x$.
   - (b) $\forall x \in \mathbb{R}$ существует противоположный элемент $-\mathbf{x}$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
   - (c) **ассоциативность** $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$.
   - (d) **коммутативность** $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y = y + x$.

   Если выполняются 1a, 1b, 1c для некоторого G, то G — группа (*аддитивная*). Если помимо этого выполняется 1d, то G — коммутативная группа (*абелева*).

2. **Умножение** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{\cdot}{\mapsto} \mathbb{R}$
   - (a) Существует нейтральный элемент **1**, такой что $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
   - (b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует обратный элемент $\mathbf{x^{-1}}$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.
   - (c) **ассоциативность** $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
   - (d) **коммутативность** $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$.

   Если выполняются 2a, 2b, 2c, то G — *мультипликативная* группа. Если же и 2d, то еще коммутативная.

1. + 2. **Дистрибутивность** $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + y) \cdot z = xz + yz$.

3. **Порядок**

   Для всех x и y из $\mathbb{R}$ определена операция $x \leqslant y$, такая что
   - (a) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leqslant x$.
   - (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, если $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x)$, то $x = y$.
   - (c) **Транзитивность:** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.
   - (d) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ справедливо $(x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$.

   Если 3a, 3b, 3c выполняются на некотором множестве G, то G — *частично упорядоченное*. Если еще и 3d, то *линейно упорядоченное*.

1. + 3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$.

2. + 3. $\forall x, y : 0 \leqslant x,\, 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x \cdot y$.

Если на P выполняются 1, 2, то P — *числовое поле* (поле). Если же еще выполняется и 3, то P — *упорядоченное поле.*

4. **Полнота (непрерывность)**

Для любых непустых множеств $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R} : \forall x, y : x \in X,\ y \in Y,\ x \leqslant y\ \exists c \in \mathbb{R} : x \leqslant c \leqslant y$.

Например, при $X = [0; \sqrt{2}), Y = (\sqrt{2}; 2]$ не найдется такого $c \in \mathbb{Q}$.

2 Изображение вещественных чисел бесконечными десятичными дробями

Вещественное число есть бесконечная десятичная дробь, то есть выражение вида

$$\pm a_0, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n \ldots,$$

где $\pm$ называется *знаком* числа, a_0 — *целое неотрицательное число*, $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ — *последовательность десятичных знаков* (то есть элементов числового множества $\{0, 1, \ldots 9\}$). При этом мы считаем по аксиоме полноты, что $+0, 00\ldots$ и $-0, 00\ldots$, а также числа вида $\pm a_0, a_1 \ldots a_n 999\ldots$ и $\pm a_0, a_1 \ldots (a_n + 1) 000 \ldots (a_n \neq 9)$ представляют соответственно одни и те же числа (между ними нельзя вставить другое вещественное число).

3 Изоморфизм

Два поля P и Q называются **изоморфными**, если существует взаимно однозначное отображение (биекция) $f\colon P \mapsto Q$, сохраняющее операции сложения и умножения, т.е. $\forall x, y \in P$

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x) \cdot f(y),$$

где f — *изоморфизм.* Если $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$, то f — изоморфизм с сохранением порядка следования.

Утверждение 1.1. *Все непрерывные упорядоченные поля изоморфны между собой.*

4 Мощность множества

Будем говорить, что множество X **равномощно** множеству Y, если существует биективное отображение X на Y, т.е. $\forall x \in X$ сопоставляется элемент $y \in Y$, причем различным элементам множества X отвечают различные элементы Y и $\forall y \in Y$ сопоставлен некоторый элемент множества X.

Биекция — инъекция и сюръекция одновременно.

$$f \text{ инъективно, если } \forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$
$$f \text{ сюръективно, если } \forall y \in Y\ \exists x \in X : y = f(x).$$

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентности между собой. Множества одного класса равномощны.

Класс, которому принадлежит множество X, называется **мощностью** множества X, а также **кардиналом** или кардинальным числом. Обозначается как $\operatorname{card} X, |X|$.

Множество называется **конечным**, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству. В противном случае оно **бесконечное**.

Говорят, что мощность множества X меньше мощности множества Y и пишут $|X| < |Y|$, если $\exists Y' \subset Y : Y' \sim X$ и $\nexists X' \subset X : X' \sim Y$.

Теорема 1.2 (*Кантор*). *Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.*

Доказательство. Предположим, что существует такое A, что $|A| = |2^A|$, т.е. что существует биекция f, ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A.

Рассмотрим множество B, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих своим образам при отображении f: $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. f биективно, а $B \subseteq A$, поэтому $\exists y \in A : f(y) = B$.

Если $y \in B$, то $y \in f(y)$, а тогда по определению $B, y \notin B$. И наоборот, если $y \notin B$, то $y \notin f(y)$, а следовательно $y \in B$. В любом случае получаем противоречие. Следовательно, исходное предположение ложно, и A не равномощно 2^A. Заметим, что 2^A содержит подмножество, равномощное A (например, множество всех одноэлементных подмножеств A), а тогда из только что доказанного следует $|2^A| > |A|$. **[:||||:]**

Множество X называется **счетным**, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$, т.е. $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$ (алеф-нуль). Множество X называется *не более чем счетным*, если оно либо конечно, либо счетно.

Утверждение 1.3. *Бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Множество $\mathbb{R}$ называют также числовым континуумом, а его мощность — мощностью континуума.

Теорема 1.4 (*Кантор*). *Множество $\mathbb{R}$ имеет мощность большую, чем множество $\mathbb{N}$.*

Доказательство. Докажем несчетность интервала $(0, 1)$. Тогда мы автоматически докажем и несчетность $\mathbb{R}$, т.к. $\operatorname{card}(0, 1) = \operatorname{card} \mathbb{R}$. Пусть имеется n вещественных чисел:

$$
\begin{aligned}
&0, a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \dots \\
&0, a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \dots \\
&\dots\dots \\
&0, a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \dots
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим число вида $0, \{\overline{a_{11}}, \overline{0}, \overline{9}\}\{\overline{a_{22}}, \overline{0}, \overline{9}\} \dots \{\overline{a_{nn}}, \overline{0}, \overline{9}\}$. Оно не равно 0 или 1, а также никакому из указанных n чисел, т.к. отличается от 1-ого числа первым знаком после запятой, от 2-ого вторым и т.д.. Таким образом, как бы не были занумерованы числа рассматриваемого промежутка, всегда найдется число из этого же промежутка, которому не присвоен номер. **[:||||:]**

Утверждение 1.5. *Множество двоичных последовательностей имеет мощность большую, чем множество $\mathbb{N}$.*

Чтобы это понять, построим биективное отображение множества двоичных последовательностей на множество $(0,1)$. Пусть имеем последовательность $a = a_1a_2a_3\dots a_n$. Поставим в соответствие a сумму $f(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{-i}$. Тем самым мы фактически интерпретируем последовательность как некоторое число из интервала $(0,1)$ в системе счисления по основанию 2.

Часть 2
Ограниченные и неограниченные множества

1 Ограниченные множества

Множество $M \subseteq \mathbb{R}$ **ограничено сверху (снизу)**, если $\exists A(B) \in \mathbb{R} : \forall x \in M,\ x \leqslant A\ (B \leqslant x)$. Множество $M \subseteq \mathbb{R}$ **ограничено**, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in M, \Rightarrow |x| \leqslant C$.

Говорят, что A — **мажоранта** для M (верхняя граница), а B — **миноранта** для M (нижняя граница).

Элемент $a \in X$ называется **максимальным (минимальным)** элементом X, если $\forall x \in X \Rightarrow x \leqslant a\ (x \geqslant a)$. Из аксиомы порядка следует, что максимальный (минимальный) элемент, если он существует, *единственен*.

Наименьшая верхняя граница называется точной верхней гранью **(супремум)** и обозначается $\sup X$. Наибольшая нижняя граница называется точной нижней гранью **(инфимум)** и обозначается $\inf X$.

$$\beta = \sup X \Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \leqslant \beta \text{ и } \forall \beta' < \beta\ \exists x \in X : x > \beta'.$$

$$\alpha = \inf X \Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \geqslant \alpha \text{ и } \forall \alpha' > \alpha\ \exists x \in X : x < \alpha'.$$

2 Верхняя и нижняя грань

Теорема 2.1 (***Принцип верхней грани***). *Любое непустое, ограниченное сверху числовое множество имеет верхнюю грань, и она единственная.*

Доказательство. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X,\ x \leqslant y\}$ (множество верхних границ). $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$ по условию.

По аксиоме полноты $\exists \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in X$ и $\forall y \in Y \Rightarrow x \leqslant \beta \leqslant y$. Число β является мажорантой для X и минорантой для Y.

Как мажоранта для X β является элементом множества $Y \Rightarrow \beta$ является минимальным элементом в множестве Y и $\beta = \min Y = \sup X$. **[:||||:]**

Теорема 2.2 (***Принцип нижней грани***). *Любое непустое, ограниченное снизу числовое множество имеет нижнюю грань, и она единственная.*

Доказательство. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X,\ y \leqslant x\}$ (множество нижних границ). $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$ по условию.

По аксиоме полноты $\exists \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in X$ и $\forall y \in Y \Rightarrow y \leqslant \beta \leqslant x$. Число β является минорантой для X и мажорантой для Y.

Как миноранта для X β является элементом множества $Y \Rightarrow \beta$ является максимальным элементом в множестве Y и $\beta = \max Y = \inf X$. **[:||||:]**

Если у множества X существует максимальный элемент, то он совпадает с $\sup X$. ***Если же существует*** $\sup X$***, то максимального элемента может и не быть.***

Например: $X = (0,1)$, $\sup X = 1$, $\inf X = 0$. Максимальный и минимальный элементы, очевидно, не существуют.

3 Теорема Архимеда

Аксиома 2.3 (Архимед)**.** *Для любого вещественного a можно найти такое натуральное n, что взяв 1 слагаемым n раз, можно превзойти a.*

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ слагаемых}} > a.$$

Теорема 2.4 (Архимед)**.** *Для любого действительного числа a можно найти такое натуральное n, что $n > a$, т.е. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > a$.*

Доказательство. Непосредственно следует из аксиомы 2.3. **[:|||||:]**

Следствие 2.5 (из теоремы 2.4)**.** *Каковы бы ни были числа a и b, $0 < a < b$, существует такое натуральное число k, что $(k-1)a \leqslant b < ka$.*

Доказательство.

$$(k-1)a \leqslant b < ka$$
$$ka - a \leqslant b < ka$$
$$k - 1 \leqslant \frac{b}{a} < k.$$

Из теоремы 2.4 известно, что существует такое n, что $b/a < n$. Выберем $k = \min\{n \mid n > b/a\}$. Тогда $k - 1 \leqslant b/a$. **[:|||||:]**

Теорема 2.6. *Пусть a и b ($a < b$) — произвольные действительные числа. Тогда существует рациональное число c, заключенное между числами a и b.*

Доказательство. Пусть $a = 0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, $b = 0,b_1b_2\ldots b_n\ldots$. Иначе говоря, представим a и b как бесконечные десятичные дроби. Случай, когда целые части этих чисел отличны от нуля, либо тривиальны, либо тривиально сводятся к этому. Найдем такое наименьшее i, что $a_i < b_i$ (оно существует, т.к. $a < b$). Теперь рассмотрим 2 случая:

1. $b_i > a_i{+}1$. Тогда примем $c = 0,a_1a_2\ldots(a_i{+}1)100\ldots$. Построенное число является конечной десятичной дробью и, очевидно, лежит между a и b.

2. $b_i = a_i + 1$. Тогда рассмотрим еще 2 случая:

   (a) $b = 0,b_1b_2\ldots b_i\ldots\overline{0}\ldots$. Пусть эта первая ненулевая цифра стоит в позиции j. Тогда возьмем $c = 0,b_1b_2\ldots b_i000\ldots100\ldots$, где 1 стоит в позиции $j{+}1$. Указанное число лежит между a и b и является конечной десятичной дробью. Заметим, что необходимо добавлять эту 1, чтобы при $a = 0,a_1a_2\ldots a_i999\ldots$ не получилось, что $c = a$.

   (b) $b = 0,b_1b_2\ldots b_i000\ldots$. Заметим, что в этом случае $a \neq 0,a_1a_2\ldots a_i999\ldots$, т.к. иначе $a = b$. Тогда найдем такое наименьшее $j > i$, что $a_j < 9$. Затем построим $c = 0,a_1a_2\ldots a_i\ldots(a_j+1)1000\ldots$. Получили конечную десятичную дробь, которая меньше b в i-ом знаке и больше a в j-ом. $a_{j+1} = 1$, т.к. в противном случае при $a = 0,a_1a_2\ldots a_i999\ldots a_j9999\ldots$ получится, что $c = a$.

[:|||||:]

4 Метод математической индукции

Теорема 2.7. *Утверждение справедливо для всякого натурального n, если:*

1. *Оно справедливо для $n = 1$.*

2. *Из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $k = n$ следует его справедливость для $n = k + 1$.*

Доказательство. От противного. Предположим, что утверждение справедливо не для всякого натурального n. Тогда существует такое натуральное m, что:

1. Утверждение для $n = m$ несправедливо.

2. Для всякого n, меньшего m, утверждение справедливо (иными словами, m есть первое натуральное число, для которого утверждение несправедливо).

Очевидно, что $m > 1$, т.к. для $n = 1$ утверждение справедливо (условие 1). Следовательно, $m - 1$ — натуральное число. Выходит, что для натурального числа $m - 1$ утверждение справедливо, а для следующего натурального числа m несправедливо. Это противоречит условию 2. **[:|||||:]**

Часть 3
Предел числовой последовательности

1 Числовые последовательности

Отображение $\mathbb{N} \mapsto X$ будем называть последовательностью и записывать как $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Отображение $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ будем называть **числовой последовательностью**.

Числовая последовательность называется **ограниченной сверху (снизу)**, если $\exists M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R}) : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$. Ч.п. $\{x_n\}$ **ограничена**, если $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leqslant A$.

Ч.п. $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ ограничена сверху и снизу. Ч.п. $\{x_n\}$ называется **неограниченной**, если $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| > A$.

$\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists N(A) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n| > A$. ***Всякая б.б.ч.п. является неограниченной, но обратное, вообще говоря, неверно.*** Например, рассмотрим следующую неограниченную последовательность:

$$x_n = \frac{n + (-1)^{n+1} \cdot n}{2}.$$

Докажем, что $\exists A_0 \in \mathbb{R} : \forall N\ \exists n_0 \geqslant N \Rightarrow |x_{n_0}| < A_0$ (отрицание определения б.б.ч.п.). Можно предъявить $A_0 = 1 : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists k_0 \geqslant N : |x_{2k_0}| = 0 < 1 = A_0$.

$\{x_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$.

2 Свойства бесконечно малых числовых последовательностей

Пусть $\{\alpha_n\}$ — б.м.ч.п.

1. $\{\alpha_n\}$ **ограничена**.

   Доказательство. Как известно, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$. Значит, для всех $n \geqslant N$ доказано. Но $\forall n < N \Rightarrow \alpha_n \leqslant \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда выберем $\varepsilon = 1$, $A = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{N-1}|, 1\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n| \leqslant A$. **[:|||||:]**

2. Если $\{y_n\}$ ограничена, то $\{\alpha_n \cdot y_n\}$ — **бесконечно малая.**

   Доказательство. $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, поэтому $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Ввиду ограниченности $\{y_n\}$, $\exists A : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |y_n| \leqslant A$. Но тогда $\{\alpha_n \cdot y_n\} : \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |\alpha_n \cdot y_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$. **[:|||||:]**

3. Если $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — **бесконечно малые.**

   Доказательство.

   $$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
   $$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall n \geqslant N \Rightarrow |\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Для произведения получаем аналогично:

   $$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{1}{\varepsilon} \text{ и } \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \varepsilon^2.$$
   $$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall n \geqslant N \Rightarrow |\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon.$$

   [:|||||:]

3 Связь бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей

Теорема 3.1. *Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая и $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая.*

Доказательство. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = A$. **[:|||||:]**

Теорема 3.2. *Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая и $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая.*

Доказательство. $\forall A > 0\ \exists N(A) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n| > A \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$. **[:|||||:]**

4 Предел числовой последовательности

Назовем *окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}$ любой интервал, содержащий эту точку, и будем обозначать ее как $\mathrm{U}(a)$. $\mathrm{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ — симметричная ε-окрестность. $\mathrm{U}'_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a) \cup (a; a+\varepsilon) = \overset{0}{\mathrm{U}}_\varepsilon = \mathrm{U}_\varepsilon \setminus \{a\}$ — проколотая.

Будем говорить, что числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет **предел, равный** a, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \mathrm{U}_\varepsilon(a)\ \exists N(\mathrm{U}_\varepsilon(a)) : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(a). \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{2}$$

Теорема 3.3. *Оба определения предела числовой последовательности эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим 1-ое определение. Если $x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(a)$, то $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Теперь рассмотрим 2-ое определение. Если $|x_n - a| < \varepsilon$, то $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т.е. $x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(a)$. **[:|||||:]**

Заметим, что оба определения предела фактически говорят о том, что последовательность $\{x_n - a\}$ — бесконечно малая.

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < \infty$, то $\{x_n\}$ — **сходящаяся** последовательность. Иначе, если не существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то $\{x_n\}$ — **расходящаяся**. Используя отрицание определения: $\{x_n\}$ — расходится $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \geqslant N : |x_n - a| \geqslant \varepsilon_0$.

Часть 4
Сходящиеся последовательности

1 Свойства сходящихся числовых последовательностей

1. *У сходящейся числовой последовательности может существовать только один предел.*

   Доказательство. От противного. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1 < a_2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда имеем:

   $$\varepsilon = \frac{a_2 - a_1}{2} \Rightarrow \text{ для } \mathrm{U}_\varepsilon(a_1)\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(a_1).$$
   $$\text{Для } \mathrm{U}_\varepsilon(a_2)\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \Rightarrow x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(a_2).$$
   $$N = \max\{N_1; N_2\} \Rightarrow \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(a_1) \text{ и } x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(a_2).$$

   Получено противоречие: $\mathrm{U}_\varepsilon(a_1) \not\cap \mathrm{U}_\varepsilon(a_2)$. **[:|||||:]**

2. *Сходящаяся числовая последовательность является ограниченной.*

   Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ сходится. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Из определения ограниченной последовательности $\exists L > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leqslant L$. Заметим, что можно взять $L = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |a+\varepsilon|, |a-\varepsilon|\}$. Указанное L ограничивает x_n, в том числе для всех таких номеров n, что $n < N$. **[:|||||:]**

3. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то* $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b, \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$, *а также* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, *если* $b \neq 0$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n, \text{ где } \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \text{ — б.м..}$$

$$x_n \pm y_n = (a+\alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + \underbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}_{\text{б.м.}}.$$

$$x_n y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + \underbrace{(\alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n)}_{\text{б.м.}}.$$

Теперь рассмотрим последовательность $\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\}$ и докажем, что она бесконечно малая. Но для начала докажем следующую лемму:

Лемма 4.1. *Пусть* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$. *Тогда* $\exists r > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \Rightarrow |y_n| > r > 0$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \frac{b}{2} \Rightarrow r < \frac{b}{2} < y_n < \frac{3b}{2}$. **[:|||||:]**

Теперь вернемся к теореме.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + \alpha_n b - ab - a\beta_n}{\underbrace{(b+\beta_n)}_{y_n} b} = (\alpha_n b - a\beta_n)\cdot\frac{1}{y_n b}.$$

Но по лемме 4.1 $\left|\frac{1}{y_n b}\right| \leqslant \max\left\{\left|\frac{1}{y_1 b}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{y_N b}\right|, \frac{1}{rb}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{1}{y_n b}\right\}$ ограничена. Но тогда имеем произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей, значит, $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ — бесконечно малая. **[:|||||:]**

2 Предельный переход и неравенства

Теорема 4.2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Если* $a < b$, *то* $\exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n < y_n$.

Доказательство. Из аксиомы полноты $\exists c : a < c < b$. По определению пределов в условии $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1$ и $\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon_2$.

Тогда $\forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - a| < c - a$ и $\forall n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n - b| < b - c$. Отсюда $\forall n \geqslant \max\{N_1; N_2\} \Rightarrow x_n < c - a + a = c = c - b + b < y_n$. **[:|||||:]**

Следствие 4.3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда если:*

- $\exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n > y_n$, *то* $a \geqslant b$.
- $\exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \geqslant y_n$, *то* $a \geqslant b$.
- $\exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n > b$, *то* $a \geqslant b$.
- $\exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \geqslant b$, *то* $a \geqslant b$.

Доказательство. Все 4 свойства докажем от противного. Предположим, что $a < b$. Тогда по теореме 4.2 $\exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n < y_n$. Для первых двух свойств уже получили противоречие, т.е. они доказаны. Выберем теперь $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. По определению предела

$$\exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$
$$\exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_2 \Rightarrow b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon,$$
$$\exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n \geqslant N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

А это противоречит условию 3 и 4 свойств. **[:|||||:]**

Следствие 4.4 (***принцип двустороннего ограничения***)**.** *$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда если $\exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \in [p, q]$, то и $a \in [p, q]$.*

Доказательство. Напрямую вытекает из следствия 4.3: раз $x_n \geqslant p$, то $a \geqslant p$. Аналогично, $x_n \leqslant q \Rightarrow a \leqslant q$. **[:|||||:]**

3 Теорема о двух милиционерах

Теорема 4.5.

$$\exists \exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \leqslant y_n \leqslant z_n.\ \textit{Причем}\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n.\ \textit{Тогда}\ \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Доказательство. Из определения предела $\{x_n\}$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Аналогично для предела $\{z_n\}$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$. Тогда $\forall n \geqslant \max\{N, N_1, N_2\} \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. **[:|||||:]**

Часть 5
Монотонные последовательности

1 Определение

Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geqslant x_{n+1}$ ($x_n \leqslant x_{n+1}$), то ч.п. называется *невозрастающей (неубывающей)* и обозначается как $\{x_n\} \searrow (\nearrow)$. В обоих случаях последовательность называется **монотонной**.

Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n > x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$), то ч.п. называется *убывающей (возрастающей)* и обозначается как $\{x_n\} \downarrow (\uparrow)$. В обоих случаях последовательность называется **строго монотонной**.

2 Теорема Вейерштрасса

Теорема 5.1. *Неубывающая ч.п. сходится т.и.т.т., когда она является ограниченной сверху.*

Доказательство. $\Rightarrow$ доказано в свойстве сходящихся последовательностей 2. Докажем $\Leftarrow$.

$\{x_n\} \nearrow$, $\{x_n\}$ ограничена сверху $\Rightarrow \exists \sup\{x_n\} = S$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : S - \varepsilon < x_N$. $\{x_n\} \nearrow \Rightarrow \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \geqslant x_N$. Но тогда $S - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant S < S + \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = S = \sup x_n$. **[:|||||:]**

Следствие 5.2. *Невозрастающая числовая последовательность сходится т.и.т.т., когда она ограничена снизу.*

Доказательство. $\Rightarrow$ доказано в свойстве сходящихся последовательностей 2. Докажем $\Leftarrow$.

$\{x_n\} \searrow$, $\{x_n\}$ ограничена снизу $\Rightarrow \exists \inf\{x_n\} = S$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : S + \varepsilon > x_N$. $\{x_n\} \searrow \Rightarrow \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \leqslant x_N$. Но тогда $S + \varepsilon > x_N \geqslant x_n \geqslant S > S - \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = S = \inf x_n$. **[:|||||:]**

3 Число Эйлера

Теорема 5.3. *Пусть* $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}.$$

По неравенству Бернулли $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$ имеем:

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Но тогда

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow y_{n-1} > y_n \Rightarrow \{y_n\} \downarrow$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) > 2\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\left(\frac{n+1}{n}\right) > 2,$$ т.е. $\{y_n\}$ ограничена снизу.

Значит, $\{y_n\}$ сходится.

Аналогичным образом доказывается сходимость $\{e_n\}$ (возрастает и ограничена сверху). Теперь, пользуясь тем, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$:

$$0 < y_n - e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) < \frac{3}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(y_n - e_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} e_n.$$

[:|||||:]

Обе последовательности стремятся к одному и тому же числу, одна сверху, другая снизу. Обозначим данный предел как **e**, тогда выполняется:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e} \text{ (число Эйлера)}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

4 Система стягивающихся сегментов

Множество отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется **системой стягивающихся сегментов (ССС)**, если выполнено:

1. Каждый последующий сегмент вложен в предыдущий, т.е. $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Лемма 5.4 (***Коши-Кантора***)**.** *Для любой ССС существует, причем единственная, точка c, принадлежащая всем отрезкам данной системы, т.е.* $\exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$.

Доказательство. Единственность. От противного.

$$\urcorner\exists d : d > c \text{ и } d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Rightarrow [c; d] \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n] \Rightarrow b_n - a_n \geqslant d - c > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Получили противоречие с п. 2.

Существование.

$\{a_n\} \nearrow, a_n \leqslant b_1 \Rightarrow \{a_n\} \to$. Аналогично, $\{b_n\} \searrow, b_n \geqslant a_1 \Rightarrow \{b_n\} \to$. Из свойства 2 $\Rightarrow \{b_n - a_n\} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Но тогда $a_n \leqslant c \leqslant b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ (как $\inf\{b_n\}$ и $\sup\{a_n\}$) $\Rightarrow c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$. **[:||||:]**

Заметим, что лемма 5.4 ***не справедлива для системы стягивающихся интервалов***. Например, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(0; \frac{1}{n}\right) = \varnothing$.

Часть 6
Частичные пределы последовательности

1 Подпоследовательности

Пусть $n_1 < n_2 < \ldots$ — некоторые натуральные числа. Тогда $\{x_{n_k}\}$ — **подпоследовательность** $\{x_n\}$. Например, $\{1, 3, 5, \ldots\}$ — нечетная подпоследовательность множества $\mathbb{N}$, в то время как $\{3, 1, 5, \ldots\}$ не является подпоследовательностью $\mathbb{N}$, т.к. $n_1 > n_2$.

Теорема 6.1. *Если $\{x_n\}$ сходится, то и **любая** ее подпоследовательность также сходится, причем к тому же самому числу.*

Доказательство.

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем произвольную подпоследовательность, выделенную из исходной с помощью номеров $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$. Поскольку $n_1 < n_2 < \ldots$, то $n_k \geqslant k$ для любого k. Тогда и $n_N \geqslant N$. А значит $n_k \geqslant N$ для всех $k \geqslant N$, т.е. условие в определении предела для них выполняется и подавно:

$$\forall k \geqslant N \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$$

[:||||:]

Теорема 6.2. *Любая подпоследовательность бесконечно большой числовой последовательности является бесконечно большой.*

Доказательство.

$\forall A\ \exists N(A) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n| > A$.
$\forall k \geqslant N \Rightarrow n_k \geqslant N \Rightarrow |x_{n_k}| > A \Leftrightarrow \{x_{n_k}\}$ — бесконечно большая.

[:|||||:]

2 Частичные пределы

Действительное число a называется **предельной точкой (частичным пределом)** $\{x_n\}$, если:

1. В любой окрестности точки a найдется бесконечно много элементов $\{x_n\}$ или
2. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, имеющая точку a своим пределом.

Теорема 6.3. *Оба определения частичного предела эквиваленты.*

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$

  Пусть в любой ε-окрестности точки a содержится бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Рассмотрим совокупность ε-окрестностей точки a, для которых ε последовательно равно $1, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n}, \ldots$. В первой из этих окрестностей выбираем элемент x_{k_1} с некоторым номером k_1, во второй x_{k_2} с номером k_2, таким что $k_2 > k_1$ и т.д.. Процесс можно продолжать неограниченно, т.к. в любой ε-окрестности точки a содержится бесконечно много элементов $\{x_n\}$. В результате получим подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$, которая сходится к a, т.к. $|x_{k_n} - a| < \frac{k}{n}$.

- $2 \Rightarrow 1$

  Предположим, что из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к a. Тогда в любой ε-окрестности точки a лежит бесконечно много элементов подпоследовательности (все, начиная с некоторого номера). Так как каждый элемент подпоследовательности является и элементом всей последовательности, то в любой ε-окрестности точки a лежит бесконечно много элементов $\{x_n\}$.

[:|||||:]

Теорема 6.4. *Любая сходящаяся числовая последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с пределом этой последовательности.*

Доказательство. Сама последовательность является собственной подпоследовательностью, поэтому по определению 2 ее предел является предельной точкой. Единственность следует из теоремы 6.1. **[:|||||:]**

3 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 6.5. *Любая ограниченная числовая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. $\{x_n\}$ ограничена $\Rightarrow \exists [a;b] : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leqslant x_n \leqslant b$. Поделим $[a;b]$ на 2 равные части. Хотя бы одна из частей (пусть это $[a_1;b_1]$) содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$.

Выберем на $[a_1;b_1]$ произвольный элемент $\{x_n\}$. Назовем его x_{n_1}. Далее делим $[a_1;b_1]$ на 2 равные части. Хотя бы одна из этих частей содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Обозначим ее $[a_2;b_2]$. Выберем $x_{n_2} \in [a_2;b_2]$. Будем продолжать выполнять указанные действия. Обозначим за x_{n_k} число, полученное на k-ом шаге, т.е. $x_{n_k} \in [a_k;b_k]$.

$$\{[a_k;b_k]\} \text{ — С.С.С., тогда по лемме 5.4 } \exists! c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k;b_k].$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c \text{ (по теореме о двух милиционерах).}$$

[:|||||:]

Назовем наибольший (наименьший) частичный предел числовой последовательности $\{x_n\}$ ее **верхним (нижним)** пределом.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \max\{k \mid k \text{ — предельная точка}\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \min\{k \mid k \text{ — предельная точка}\}.$$

Теорема 6.6. *Любая ограниченная числовая последовательность имеет верхний и нижний пределы.*

Доказательство. Докажем существование верхнего предела и хотя бы одной предельной точки (для нижнего предела доказательство аналогично). $\{x_n\}$ ограничена $\Rightarrow \exists m, M : \forall n \in \mathbb{N}\ m \leqslant x_n \leqslant M$.

Пусть $\{x\} = \{x \mid$ справа от x лежит лишь конечное число элементов из $\{x_n\}\}$. Заметим, что множеству $\{x\}$ принадлежит любое число x, такое что $x \geqslant M$. Кроме того, множество $\{x\}$ ограничено снизу (в качестве границы подойдет любое такое c, что $c \leqslant m$). Значит, $\exists \inf\{x\}$. Докажем, что $\bar{x} = \inf\{x\}$ — верхний предел $\{x_n\}$.

1. Докажем, что $\bar{x}$ — предельная точка.

   Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. $\bar{x} = \inf\{x\} \Rightarrow \forall y : y < \bar{x} \Rightarrow y \notin \{x\}$. Иначе говоря, правее $\bar{x} - \varepsilon$ лежит бесконечно много элементов $\{x_n\}$.

   $$\bar{x} = \inf\{x\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x' : \bar{x} \leqslant x' < \bar{x} + \varepsilon.$$

   По определению $\{x\}$ правее x' лежит не более, чем конечное число элементов $\{x_n\}$.

   Так как правее $\bar{x} - \varepsilon$ лежит бесконечно много, а правее x' — лишь конечное число элементов $\{x_n\}$, то на интервале $(\bar{x} - \varepsilon, x')$ (а значит и на интервале $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$) лежит бесконечно много элементов $\{x_n\}$, т.е. $\bar{x}$ — предельная точка.

2. Докажем, что ни одно число $\bar{\bar{x}} > \bar{x}$ не является предельной точкой $\{x_n\}$.

   Пусть $\varepsilon = (\bar{\bar{x}} - \bar{x})/2$, тогда $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) \cap (\bar{\bar{x}} - \varepsilon, \bar{\bar{x}} + \varepsilon) = \varnothing$. Тогда вся ε-окрестность точки $\bar{\bar{x}}$ будет лежать правее $\bar{x} + \varepsilon$. Как показано выше, для любого $\varepsilon > 0$ правее $\bar{x} + \varepsilon$ лежит лишь конечное число элементов $\{x_n\}$. Значит, в рассматриваемой ε-окрестности точки $\bar{\bar{x}}$ лежит не более, чем конечное число элементов $\{x_n\}$, а это означает, что $\bar{\bar{x}}$ не является предельной точкой $\{x_n\}$.

[:|||||:]

Следствие 6.7. *Пусть числовая последовательность $\{x_n\}$ ограничена и пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \bar{x}, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{x}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ вне интервала $(\underline{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ лежит лишь конечное число элементов $\{x_n\}$.*

Доказательство. Для «правой» части доказательство проведено в следствии 6.6. Для «левой» части все аналогично. [:|||||:]

Будем называть последовательность $\{x_n\}$ сходящейся к $+\infty\,(-\infty)\,(\infty)$, если $\forall M > 0\ \exists N(M) : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n > M\,(x_n < -M)\,(|x_n| > M)$.

Лемма 6.8. *Из каждой числовой последовательности можно выделить либо сходящуюся подпоследовательность, либо подпоследовательность, сходящуюся к ∞.*

Доказательство. Для ограниченной последовательности утверждение было доказано ранее. $\exists\{x_n\}$ — неограниченная $\Rightarrow \forall K\ \exists n_k : x_{n_k} > K$. $n_k < n_{k+1}$, тогда при $N = n_k \Rightarrow \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n > K \Leftrightarrow \{x_n\} \to \infty$. [:|||||:]

4 Критерий сходимости числовой последовательности

Теорема 6.9. *Ограниченная числовая последовательность сходится т.и.т.т., когда ее верхний и нижний пределы совпадают.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  $\{x_n\} \to\ \Rightarrow$ любая ее подпоследовательность сходится к тому же самому числу, т.е. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

- ***Достаточность.***

  $\exists \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = x$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ вне интервала $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ лежит только конечное число элементов последовательности. Значит, $\{x_n\}$ не имеет другой предельной точки, т.е. $\{x_n\}$ сходится.

[:|||||:]

Следствие 6.10. *Числовая последовательность сходится т.и.т.т., когда сходится любая ее подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть сходится какая угодно подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_k\}$. Тогда сходится и сама последовательность $\{x_k\}$, так как она одновременно является и подпоследовательностью.

Пусть теперь сходится последовательность $\{x_k\}$. Возьмем любую подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Нижний и верхний пределы подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ заключены между нижним и верхним пределами последовательности $\{x_k\}$. Но эти последние пределы совпадают, значит совпадают нижний и верхний пределы подпоследовательности, что обеспечивает сходимость $\{x_{k_n}\}$. [:|||||:]

Часть 7

Критерий Коши

1 Фундаментальная последовательность

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Теорема 7.1. *Если $\{x_n\}$ — фундаментальная, то существует такое N, что для любого $\varepsilon > 0$ вне интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ лежит только конечное число элементов данной последовательности.*

Доказательство.

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$
$|x_N - x_{N+p}| < \varepsilon,$
$x_N - \varepsilon < x_{N+p} < x_N + \varepsilon.$

Т.е. между $x_N - \varepsilon$ и $x_N + \varepsilon$ лежат «практически все» элементы последовательности, т.е. вне этого интервала их лишь конечное число. **[:|||||:]**

Теорема 7.2. *Любая фундаментальная числовая последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Из фундаментальности следует, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Из предыдущей теоремы $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow x_N - \varepsilon < x_{N+p} < x_N + \varepsilon$. Если $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists A > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leqslant A$. Тогда примем $A = \max\{|x_N - \varepsilon|, |x_N + \varepsilon|, |x_1|, \ldots, |x_N|\}$. **[:|||||:]**

2 Критерий Коши

Теорема 7.3. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится т.и.т.т., когда она фундаментальна.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  $\exists\{x_n\} \to\ \Rightarrow \exists a : \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon)\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда тем паче $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, $|x_n - x_{n+p}| = |x_n - a + a - x_{n+p}| \leqslant |x_n - a| + |x_{n+p} - a| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \{x_n\}$ фундаментальна.

- ***Достаточность.***

  $\exists\{x_n\}$ фундаментальна $\Rightarrow \{x_n\}$ ограничена. Тогда вследствие теорем 6.7 и 7.1 $\forall\varepsilon > 0\ (\underline{x}; \bar{x}) \subset (x_N - \varepsilon; x_N + \varepsilon)$, из чего следует, что $0 \leqslant \bar{x} - \underline{x} < 2\varepsilon$. $\bar{x} \geqslant \underline{x} \Rightarrow \bar{x} - \underline{x} = 0$ (иначе можно было бы подобрать такое ε, что предыдущее неравенство не выполнялось) $\Rightarrow \bar{x} = \underline{x} \Leftrightarrow \{x_n\} \to$.

[:|||||:]

3 Телескопический признак сходимости

Теорема 7.4. *Пусть* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. *Тогда последовательность* $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ *сходится т.и.т.т., когда сходится последовательность* $y_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$.

Доказательство. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ не убывают, значит они сходятся т.и.т.т., когда они ограничены сверху.

- ***Достаточность.***

  Пусть $\{y_n\} \to$, тогда $\exists M > 0 : \forall n \Rightarrow |y_n| \leqslant M$. Поскольку $n \leqslant 2^{n+1} - 1$, то

$$x_n = a_1 + \dots + a_n \leqslant a_1 + \dots + a_n + \dots + a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1}.$$

  Теперь сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} a_1 &\leqslant a_1 \\ a_2 + a_3 &\leqslant 2a_2 \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &\leqslant 4a_4 \\ &\dots \\ a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1} &\leqslant 2^n a_{2^n}. \end{aligned}$$

  Тогда получаем, что

$$a_1 + \dots + a_n + \dots + a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1} \leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} = y_n.$$

  А значит, $\{x_n\} \to$.

- ***Необходимость.***

  Пусть теперь $\{x_n\} \to$, т.е. $\{x_n\}$ ограничена. Заметим, что

$$\begin{aligned} a_1 &\geqslant \frac{1}{2} a_1 \\ a_2 &\geqslant a_2 \\ a_3 + a_4 &\geqslant 2a_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

  Тогда получаем, что

$$x_{2^n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n} \geqslant \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2} y_n.$$

  А значит, $\{y_n\} \to$.

[:|||||:]

Часть 8
Леммы, связанные с непрерывностью множества действительных чисел

1 Покрытие множеств

Будем говорить, что система множеств $S = \{X\}$ *покрывает* множество E, если любой $y \in E$ находится хотя бы в одном X_i. В этом случае S называют *покрытием* множества E.

Будем говорить, что S' является *подсистемой* системы S, если $S' \subset S$ и S' — система той же природы.

Поясним то, о чем говорится в этом определении: S — это множество множеств X_i. Эти X_i могут быть отрезками, интервалами, лучами и т.д.. Тогда S' включается в S и состоит из множеств X_i' того же характера — отрезков, интервалов или лучей, что и множества X_i.

Лемма 8.1 (*Гейне-Бореля*). *Из любого покрытия интервалами отрезка $[a;b]$ можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. От противного: пусть система интервалов S покрывает $[a;b]$ и из нее нельзя выделить конечное подпокрытие.

Пусть $I_1 = [a;b]$. Разделим I_1 на две равные части. Хотя бы одну из этих частей нельзя покрыть конечной подсистемой интервалов (т.к. конечное+конечное=конечное). Выберем эту часть и назовем ее I_2. Для нее выполним такую же операцию: выберем половину, не покрываемую конечной подсистемой и назовем ее I_3. Выстроим такую последовательность $\{I_n\}$, что ни один ее элемент не покрывается конечной подсистемой S. Но т.к. I_{k+1} — это одна из частей отрезка I_k, то $\{I_n\}$ — это последовательность вложенных сегментов ($I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots$). Однако длина каждого $I_n = \frac{I_1}{2^{n-1}} \to 0 \Rightarrow \{I_n\}$ — система стягивающихся сегментов (С.С.С.).

По лемме 5.4 для каждой С.С.С. $\exists! c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Т.к. любой $I_n \in [a;b]$, то и $c \in [a;b]$. Но тогда в системе S найдется хотя бы один такой интервал, что точка c в нем содержится. Пусть это интервал $(\alpha;\beta)$. $\exists \varepsilon = \min\{c-\alpha; \beta - c\}$. Поскольку последовательность $\{I_n\}$ убывает к 0, то всегда найдется такой отрезок I_n, что его длина меньше выбранного ε. Тогда левый конец I_n лежит не дальше, чем α, а правый — не дальше, чем β, а значит, весь отрезок I_n покрывается конечной подсистемой S, а конкретно, интервалом $(\alpha;\beta)$. Получили противоречие: лемма доказана. **[:|||||:]**

2 Предельные точки множеств

Точка x называется **предельной точкой множества** E, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много элементов множества E.

Множество таких точек x будем обозначать $\overline{E}$. Например, если $E = (\alpha;\beta)$, то $\overline{E} = [\alpha;\beta]$ (это как раз и следует из *непрерывности множества действительных чисел*, вынесенной в заголовок. Нетрудно сообразить, что любой интервал $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$ содержит бесконечно много действительных чисел).

Лемма 8.2 (*Больцано-Вейерштрасса*). *У любого ограниченного бесконечного множества X есть хотя бы одна предельная точка.*

Доказательство. От противного. Т.к. X ограничено, то $\exists [a;b] : \forall x \in X \Rightarrow x \in [a;b]$. Пусть у множества X нет предельных точек $\Leftrightarrow \forall x \in [a;b]\ \exists \mathrm{U}(x)$, содержащая не более чем конечное число элементов множества X. Почему эти два высказывания эквиваленты? Действительно, допустим, что у ограниченного множества есть предельная точка $y : y \notin [a;b]$. Пусть $y < a$, тогда для окрестности $(y;a)$ критерий предельной точки не выполняется — там нет элементов множества X.

Для каждой точки $x \in [a;b]$ выберем $\mathrm{U}(x)$, не дающую точке стать предельной. Объединение таких окрестностей покроет весь отрезок $[a;b]$ (т.к. если нашлась такая $y \in [a;b] : y \notin \bigcup \mathrm{U}(x)$, то $\bigcup \mathrm{U}(x) \not\supseteq \mathrm{U}(y)$, что невозможно). Тогда существует конечная подсистема окрестностей, покрывающая $[a;b]$ (по лемме 8.1). Но в каждой окрестности этой подсистемы содержится только конечное число элементов X (мы так выбирали окрестности), а всего таких окрестностей конечное число, а значит, всего элементов в X — конечное число, что противоречит условию. **[:||||:]**

Назовем $x \in E$ **изолированной**, если у этой точки существует окрестность без других точек множества E, т.е. $E \cap \mathrm{U}'(x) = \varnothing$. Ясно, что *изолированная точка не может быть предельной*, равно как и *любая точка, не являющаяся предельной, — изолированная.*

Часть 9
Предел функции

1 Определения

Рассмотрим множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ и число $a \in \mathbb{R}$ — предельную точку множества $\mathbb{E}$ (при этом a необязательно принадлежит $\mathbb{E}$). Пусть задана функция $f\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$. Такие функции (множество значений которых лежит в $\mathbb{R}$) называют **действительнозначными**.

1.1 Предел функции в точке по Коши

$$\lim_{\mathbb{E}\ni x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{E},\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$$\boxed{\forall \mathrm{V}_\varepsilon(b)\ \exists \mathrm{U}'_\delta(a) :\ f(\mathrm{U}'_\delta(a) \cap \mathbb{E}) \subset \mathrm{V}_\varepsilon(b).}$$

Это определение сравнительно легко представить: мы ищем предел функции в некоторой точке. Определение по Коши говорит о том, что функция принимает сколь угодно близкие к своему пределу b значения в какой-то окрестности точки a.

Однако, это определение не очень хорошо описывает случай, когда $x \to \infty$. Поэтому слегка изменим его для этого случая:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 : \forall x \in \mathbb{E},\ |x| > x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

1.2 Предел функции в точке по Гейне

$$\lim_{\mathbb{E}\ni x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \neq a \text{ и } x_n \in \mathbb{E},\ \text{где } \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} b.$$

И это определение звучит вполне логично: если мы начинаем как угодно близко подходить по x к a, значения $f(x)$ начинают стремиться к b.

Прежде чем доказывать то, что мы дали два эквивалентных определения предела функции в точке, поговорим о том, что мы доказывали раньше. А именно о том, как связан предел последовательности и предел функции.

На самом деле, что такое последовательность? Это $f\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Т.е. *действительнозначная функция от натуральных чисел* $\Leftrightarrow \mathbb{E}_f = \mathbb{N}$. Однако предел функции был нами определен лишь только в предельных точках множества $\mathbb{E}$. Ясно, что для любого натурального *конечного* числа для $\varepsilon = 0.3$ (например) в окрестности вообще нет других элементов $\mathbb{E}$. Но вот ∞, в которой мы как раз считаем предельное значение последовательностей, — это предельная точка множества $\mathbb{N}$ (по определению $\infty = \infty - a$, где $a \in \mathbb{N}$, что означает наличие бесконечного числа натуральных чисел в любой окрестности числа ∞). Поэтому предел последовательности может быть найден только на бесконечности.

Важно отметить, что функция необязательно должна быть определена в точке a для того, чтобы существовал $\lim\limits_{\mathbb{E}\ni x\to a} f(x)$. Например, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (то, что скоро будет названо *первым замечательным пределом*), хотя сама функция в $x = 0$ не определена.

2 Эквивалентность формулировок

Теорема 9.1. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство.

- Из определения по Коши следует определение по Гейне.

  Тогда $\forall \mathrm{V}_\varepsilon(b)\ \exists \mathrm{U}'_\delta(a) : f(\mathrm{U}'_\delta(a) \cap \mathbb{E}) \subset \mathrm{V}_\varepsilon(b) \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow f(x) \in \mathrm{V}_\varepsilon(b)$ — это определение по Коши.

  Выберем произвольную $\{x_n\} : \forall x_n \neq a$ и $\xrightarrow[n\to\infty]{} a$. По определению предела последовательности $\forall \delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$. Указанное неравенство выполняется для любого $\delta > 0$. Тогда какое бы $\varepsilon > 0$ мы бы ни выбрали, можно найти $\delta > 0$, такое что по определению по Коши будет выполняться $\forall x_n \in \mathrm{U}'_\delta(a) \Rightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon$, т.е. $\{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, а значит из сходимости по Коши следует сходимость по Гейне.

- Из определения по Гейне следует определение по Коши.

  От противного: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Гейне, но $b \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Коши. Напишем *отрицание определения по Коши*:

  $$\exists V_{\varepsilon_0}(b) : \forall \mathrm{U}'_\delta(a)\ \exists x \in \mathrm{U}'_\delta(a) : |f(x) - b| \geqslant \varepsilon_0.$$

  Буквально это значит следующее: найдется такой ε_0, что для любого δ_i найдется такой x_i, что $|f(x_i) - b| \geqslant \varepsilon_0$. Т.к. δ может быть любым, то можно выбрать последовательность $\{\delta_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. Тогда из вышесказанного следует, что для каждого элемента этой последовательности существует хотя бы одно x_n, такое что $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, но $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon_0$. Но при $n \to \infty$, т.к. $0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, то $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (по теореме о двух милиционерах для *последовательностей*). Таким образом, мы получили два одновременных результата — $x_n \to a$ и $f(x_n) \nrightarrow b$, что не так по Гейне, т.е. получили противоречие.

[:|||||:]

И тут возникает достаточно хороший вопрос: а зачем нам нужно было вводить два определение одной величины? Дело в том, что оба они удобны в разных ситуациях: определение по Коши — прежде всего тем, что оно универсально (или говорят, что оно на *языке эпсилон-дельта* или $\varepsilon\delta$-языке), а определение по Гейне — тем, что оно позволяет работать с пределами функций через пределы последовательностей, для которых уже существует база доказанных утверждений. Например:

Теорема 9.2. *Предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *единственен.*

Доказательство. Это следует из определения по Гейне, т.к. предел числовой последовательности единственен. **[:|||||:]**

$f(x)$ называется **ограниченной на** $\mathbb{E}$, если $\exists M > 0\ \forall x \in \mathbb{E} : |f(x)| \leqslant M$.

Теорема 9.3. *Если функция в точке* a *сходится к числу, отличному от бесконечности, то она ограничена на некоторой окрестности точки* a*, т.е.* $\exists\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b < \infty \Rightarrow \exists \mathrm{U}'_\delta(a)$: $f(x)$ *ограничена на* $\mathrm{U}'_\delta(a)$.

Доказательство. Из определения по Коши $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Это значит, что есть такая $\mathrm{U}'_\delta(a)$, что для всех принадлежащих ей x, $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, т.е. получили границы для $f(x)$. **[:|||||:]**

3 Односторонние пределы

Будем считать, что $\forall\delta > 0$ интервалы $(a - \delta; a)$ и $(a; a + \delta)$ содержат хотя бы одно значение из $\mathbb{E}$.

Назовем число b **левым (правым)** пределом f по Коши, если:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{E},\ a - \delta < x < a\,(a < x < a + \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Назовем число b **левым (правым)** пределом f по Гейне, если:

$$\forall\{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N},\ x_n < a\,(x_n > a),\ \text{и}\ x_n \in \mathbb{E},\ \text{и}\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} b.$$

Обозначим односторонние пределы так: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b = f(a+0)$. Таким образом, когда мы можем «подойти» к предельному значению функции, двигаясь по x к точке a слева, говорят, что существует левый предел. Аналогично следует понимать и определение правого предела. Поэтому если мы можем подойти к a и слева, и справа, то существует предел в точке a. В кванторах это значит следующее:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \exists f(a-0) = f(a+0) = b.$$
$$(\text{т.к. } \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow a - \delta < x < a \text{ и } \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow a < x < a + \delta \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta).$$

Здесь стоит упомянуть о следующем: если точка $a \in \mathbb{E}$, то из этого вовсе не следует, что предел функции в ней равен $f(a)$. Например, пусть

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = 1 : -1 < x < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} x = -1 \Rightarrow |\operatorname{sgn} x - (-1)| = 0 < \varepsilon$ и $\forall x : 0 < x < 1 \Rightarrow \operatorname{sgn} x = 1 \Rightarrow |\operatorname{sgn} x - 1| = 0 < \varepsilon$. Отсюда $\exists \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -1$, $\exists \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$. Т.к. $1 \neq -1$, то $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Часть 10
Теоремы, связанные с понятием предела функции

1 Арифметические операции с пределами

Вспомним о том, что мы ввели два определения и доказали достаточно много содержательных утверждений для последовательностей и их пределов. Поэтому сейчас их можно обобщить на функции:

Теорема 10.1. $\exists\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. *Тогда:*

1. $\exists \lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$.
2. $\exists \lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = bc$.
3. $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, *при* $c \neq 0$ *и* $\forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a) : g(x) \neq 0$.

Доказательство. Приведем пример доказательства для сложения и вычитания (для остальных операций аналогично). Из определения по Гейне следует, что $\forall \{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \neq a, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} b, \{g(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} c$. Тогда, используя свойство для числовых последовательностей, получаем, что $\{f(x_n) \pm g(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} b \pm c \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$. **[:||||:]**

Из этой теоремы не принято выводить никаких следствий, но полезно знать и более общие утверждения, которые следуют из теоремы 10.1: существование предела в точке для суммы и произведения двух функций означает существование предела в точке для *конечного числа* функций (если они все в этой точке сходятся, естественно), причем этот предел равен сумме или произведению всех пределов.

2 Предел композиции функций

$\exists f(x)\colon \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, $g(y)\colon \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{R}$, при этом $\forall x \in \mathbb{X} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Y}$ (или $f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$). Тогда на $\mathbb{X}$ определена **композиция** функций g и f: $f \circ g$ или (иначе) **сложная** функция $g\,(f(x))$.

Теорема 10.2. $\exists f(x)\colon \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, $g(y)\colon \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{R}$, $f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$. *Пусть также* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g\,(f(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$.

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0$. Для *произвольной* окрестности $\mathrm{U}(z_0)$ найдется такая $\mathrm{V}'(y_0) : \forall y \in \mathbb{Y} \cap \mathrm{V}'(y_0) \Rightarrow g(y) \in \mathrm{U}(z_0)$. Для $\mathrm{V}'(y_0)$ $\exists \mathrm{W}'(x_0) : \forall x \in \mathrm{W}'(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Y} \cap \mathrm{V}'(y_0)$. Объединяя оба утверждения, получаем:

$$\forall \mathrm{U}(z_0)\ \exists \mathrm{W}'(x_0) : \forall x \in \mathrm{W}'(x_0) \cap \mathbb{X} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Y} \cap \mathrm{V}'(y_0) \Rightarrow g\,(f(x)) \in \mathrm{U}(z_0).$$

Это в точности то, что требуется доказать. **[:||||:]**

Во многих доказательствах, которые ведутся при помощи определений тех или иных понятий с большим числом кванторов существования и единственности важно понимать, какие элементы мы можем выбрать *произвольно*, а какие уже выбрать придется *однозначно*. Например, выше в процессе доказательства мы получили, что для *произвольной* окрестности точки z_0 найдется *какая-то определенная этой уже нами выбранной окрестностью* окрестность точки x_0.

Поговорим о том, что было получено в предыдущей теореме. Зачастую кажется, что такая конструкция, как предел композиции функций, довольно сложна в использовании, но это не так. Допустим, нужно вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$. Тогда, не ссылаясь на неопределенные пока (да и непонятные) свойства монотонности и непрерывности, можно вычислить такой предел: пусть $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ и $g(x)=x^2$. Тогда по теореме 10.2 можно найти предел $f(x)$ и искать предел $g(x)$ в найденном значении предела $f(x)$.

3 Предельный переход и неравенства

$\exists\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ и $b<c$. Тогда:

1. $\exists \mathrm{U}'(a) : \forall x\in \mathrm{U}'(a) \Rightarrow f(x)<g(x)$.

   Доказательство. По аксиоме полноты $\exists d : b<d<c$.

   По определению предела $\exists \mathrm{U}'_1(a)$, $\exists \mathrm{U}'_2(a) : \forall x\in \mathrm{U}'_1(a)\Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon_1=d-b$ и $\forall x\in \mathrm{U}'_2(a)\Rightarrow |g(x)-c|<\varepsilon_2=c-d$.

   $\exists \mathrm{U}'(a)=\mathrm{U}'_1(a)\cap \mathrm{U}'_2(a) : \forall x\in \mathrm{U}'(a)\Rightarrow |f(x)-b|<d-b$ и $|g(x)-c|<c-d$. Тогда $b-d<f(x)-b<d-b$ и $d-c<g(x)-c<c-d \Rightarrow f(x)<d=d-c+c<g(x)$. **[:||||:]**

2. **Лемма о двух милиционерах для функций.** $\exists f,g,h\colon\ \mathbb{E}\mapsto\mathbb{R}$ и $\forall x\in\mathbb{E}\Rightarrow f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ и $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$. Тогда $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$.

   Доказательство. По определению предела $\forall\varepsilon>0\ \exists \mathrm{U}'_1(a) : \forall x\in \mathrm{U}'_1(a)\Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$ и $\exists \mathrm{U}'_2(a) : \forall x\in \mathrm{U}'_2(a)\Rightarrow |h(x)-b|<\varepsilon$. Отсюда $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ и $b-\varepsilon<h(x)<b+\varepsilon$.

   Тогда $\forall x\in \mathrm{U}'_1(a)\cap \mathrm{U}'_2(a)$ выполняется: $b-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)<b+\varepsilon\Rightarrow |g(x)-b|<\varepsilon\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=b$. **[:||||:]**

Как мы можем заметить, доказательства этих теорем практически слово в слово повторяют доказательства аналогичных теорем для последовательностей. Разница заключается лишь в подмножестве аргумента, на котором исследуется доказываемое: для последовательностей — на $[N,\infty)$, а для функций — на $\mathrm{U}'(a)$.

Следствие 10.3. $\exists\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=b, \exists\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$. *Тогда, если* $\exists \mathrm{U}(a)$, *для которой:*

1. $f(x)<g(x)\Rightarrow b\leqslant c$.

2. $f(x)\leqslant g(x)\Rightarrow b\leqslant c$.

3. $f(x)<c\Rightarrow b\leqslant c$.

4. $f(x)\leqslant c\Rightarrow b\leqslant c$.

Часть 11
Критерий Коши существования предела функции

1 Критерий Коши

Будем говорить, что $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \mathbb{E} :\ 0 < |x' - a| < \delta\ \wedge\ 0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

На обыденном языке это значит, что всегда найдется такая окрестность на множестве $\mathbb{E}$, что значения функции на этой окрестности могут быть сколь угодно близки.

Теорема 11.1. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow f(x)$ *удовлетворяет условию Коши.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  $\exists\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \mathbb{E} \cap \mathrm{U}'_\delta(a) \Rightarrow |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - b| + |b - f(x'')| < \varepsilon$.

- ***Достаточность.***

  Дана функция, удовлетворяющая условию Коши, и требуется доказать ее сходимость.

  Независимо от сходимости самой $f(x)$, существуют такие последовательности $\{x_n\}$, которые сходятся к числу a (это определение предельной точки), при этом ни один $x_n \neq a$. Покажем, что для такой последовательности соответствующая ей $\{f(x_n)\}$ сходится к b. В условии Коши для любого ε выберем δ и используем как выбранный разброс значений для предельных значений последовательности $\{x_n\}$. Т.е. для *этого выбранного* δ $\exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$. Пусть p — некоторое натуральное число. Тогда тем паче $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < |x_{n+p} - a| < \delta$.

  В итоге, для $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < |x_{n+p} - a| < \delta$ и $0 < |x_n - a| < \delta$, откуда по условию Коши $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\}$ — фундаментальна. Пусть $\{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Итак, для всех $\{x_n\}$, сходящихся к a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Осталось показать, что все они сходятся к одному и тому же числу.

  Докажем от противного: нашлась такая $\{x'_n\}$, сходящаяся к a, что $\{f(x'_n)\} \to b'$. Рассмотрим последовательность $\{y_n\} = x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3 \ldots$. Ясно, что она сходится к a (действительно, докажем это, пользуясь определением предела последовательности: для выбранного ε найдем номер N для $\{x_n\}$ и N' для $\{x'_n\}$, что $\forall n \geqslant \max\{N, N'\} \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ и $|x'_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$). Тогда по ранее доказанному последовательность $\{f(y_n)\}$ сходится. Но мы предположили, что у нее есть уже два неравных частичных предела. Получили противоречие.

[:|||||:]

2 Асимптотическое сравнение функций

Будем считать, что $f\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$, $h\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$. Пусть $\exists c > 0, \mathrm{U}'(a) : \forall x \in \mathrm{U}'(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow |f(x)| \leqslant c|g(x)|$. Тогда говорят, что f **ограничена по сравнению с** g **в окрестности точки** a и обозначают это как $f = \mathrm{O}(g)$, $x \to a$. На письме обычно лучше использовать запись $f = \underline{\mathrm{O}}(g)$.

1. $f(x) = \frac{1}{x} = \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x \to 0$, т.к. $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^2}\right|$, $|x| < 1$.
2. $\frac{1}{x^2} = \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to \infty$, т.к. $\left|\frac{1}{x^2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x}\right|$, $|x| > 1$.

Иными словами, $f = \underline{\mathrm{O}}(g)$, $x \to a$, если в некоторой окрестности точки a значения функции f по модулю не более чем в конечное число раз превосходят модуль значения функции g. Заметим, что иногда это определение удобно представлять как:

$$f(x) = \underline{\mathrm{O}}(g(x)),\ x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x)g(x), \text{ где } \varphi(x) \text{ ограничена при } x \to x_0.$$

Если $f = \underline{\mathrm{O}}(g)$, $x \to a$ и $g = \underline{\mathrm{O}}(f)$, $x \to a$, то говорят, что f **и** g **— функции одного порядка роста при** $x \to a$. Обозначается как $f \asymp g$, $x \to a$.

3. $f(x) = x,\ g(x) = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$. Считая $a \neq 0$, при $x \to a$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{|x|}{|x|\left|2 + \sin\dfrac{1}{x}\right|} \leqslant 1 \Rightarrow |f| \leqslant |g|.$$

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \left|2 + \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 3 \Rightarrow |g| \leqslant 3|f|.$$

Тогда $f \asymp g$, $x \to a$.

Назовем $f(x)$ и $g(x)$ **эквивалентными (асимптотически равными)** при $x \to a$, если:

$$\exists \mathrm{U}'(a) : \forall x \in \mathrm{U}'(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow f(x) = \varphi(x) \cdot g(x),\ \text{где } \lim_{x \to a} \varphi(x) = 1.$$

Обозначение: $f \underset{x \to a}{\sim} g$.

4.

$$f(x) = \frac{x^6}{1 + x^4} \underset{x \to 0}{\sim} x^6,\ \text{т.к. } \frac{x^6}{1 + x^4} = \boxed{\frac{1}{1 + x^4}} \cdot x^6.$$

$$f(x) = \frac{x^6}{1 + x^4} \underset{x \to \infty}{\sim} x^2,\ \text{т.к. } \frac{x^6}{1 + x^4} = \boxed{\frac{x^4}{1 + x^4}} \cdot x^2.$$

В обоих случаях $\varphi(x)$ это не что иное, как часть, заключенная в рамку.

2.1 Свойства отношения эквивалентности

1. **Симметричность.** Если $f \underset{x \to a}{\sim} g$, то $g \underset{x \to a}{\sim} f$.

Доказательство. $f = \varphi \cdot g \Rightarrow g = \frac{1}{\varphi} \cdot f \Rightarrow g \underset{x \to a}{\sim} f$ (т.к. если $\varphi \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$, то и $\frac{1}{\varphi} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$). **[:||||:]**

2. **Транзитивность.** Если $f \underset{x\to a}{\sim} g$, $g \underset{x\to a}{\sim} h$, то $f \underset{x\to a}{\sim} h$.

   Доказательство.

   $$\exists \mathrm{U}_1'(a) : \forall x \in \mathrm{U}_1'(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow f(x) = \varphi(x) \cdot g(x).$$
   $$\exists \mathrm{U}_2'(a) : \forall x \in \mathrm{U}_2'(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow g(x) = \psi(x) \cdot h(x).$$

   Тогда при $\mathrm{U}'(a) = \mathrm{U}_1'(a) \cap \mathrm{U}_2'(a)$ (пересечение не пусто, т.к. обе окрестности содержат в себе хоть какую-то бесконечно малую окрестность a) выполняется $f(x) = \boxed{\varphi(x) \cdot \psi(x)} \times$ $\times\, h(x) \Rightarrow f \underset{x\to a}{\sim} h$, т.к. $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x) \cdot \psi(x)) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 1$. **[:|||||:]**

3. Если $\exists \mathrm{U}'(a) : g(x) \neq 0$ при $x \in \mathrm{U}'(a) \cap \mathbb{E}$, то $f \underset{x\to a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Однако, если $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, то требование $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ необязательно (см. первый замечательный предел).

Будем говорить, что $f(x)$ **бесконечно малая по сравнению с** $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\exists \mathrm{U}'(a) : \forall x \in \mathrm{U}'(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), x \to a, \text{ где } \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

Обозначается как $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$, $x \to a$ или (что лучше на письме) $f(x) = \bar{\mathrm{o}}(g(x))$, $x \to a$. Например:

$$\frac{1}{x^2} = \bar{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right), x \to \infty \qquad\qquad x^2 = \bar{\mathrm{o}}(x), x \to 0$$
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \qquad\qquad x^2 = x \cdot x.$$

Справедливо также свойство, похожее на 3, а именно, если $g(x) \neq 0$ в $\mathrm{U}'(a)$, то $f = \bar{\mathrm{o}}(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$ и $f = \bar{\mathrm{o}}(g)$, то функция $f(x)$ **бесконечно малая более высокого порядка малости.**

Обозначения $\underline{\mathrm{O}}$ и $\bar{\mathrm{o}}$ называются *символами Ландау*. Асимптотическое сравнение может быть очень удобным, поскольку при изучении поведения сложной функции позволяет с малой относительной погрешностью перейти к другой, более простой.

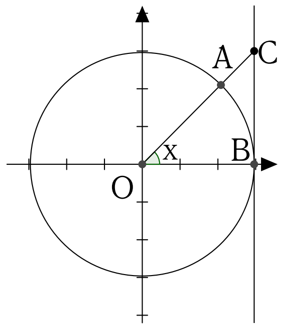
3 Замечательные пределы

3.1 Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Доказательство. Рассмотрим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x}$ и докажем, что они равны 1.

- *Правый односторонний предел*



Пусть $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Отложим этот угол на окружности радиуса R. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2}R^2 \sin x, \\ S_{AOB \text{ (сектор)}} &= \frac{1}{2}R^2 x, \\ S_{\triangle OCB} &= \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Из чего следует, что

$$\begin{gathered} 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x, \\ 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \\ \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \end{gathered}$$

Но тогда по теореме о двух милиционерах получаем, что $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- *Левый односторонний предел*

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \begin{bmatrix} u = -x \\ x = -u \\ u \to 0+0 \\ x \to 0-0 \end{bmatrix} = \lim_{u \to 0+0} \frac{\sin(-u)}{-u} = \lim_{u \to 0+0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

[:||||:]

3.2 Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Доказательство. Точно также рассмотрим отдельно правый и левый односторонние пределы.

- *правый*

  Пусть $\{x_k\} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 + 0$ ($\{x_k\} \to 0$, $x_k > 0$) и при этом $x_k < 1$. По теореме Архимеда $\exists n_k : n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n_k+1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k}$. $\{x_k\} \to 0 + 0 \Rightarrow \{n_k\} \to +\infty$ (доказывается от противного по теореме о двух милиционерах), тогда (возводим каждую часть неравенства в соответствующую ей степень из неравенства Архимеда, предварительно прибавив 1):

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} e$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1+\frac{1}{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} e.$$

Тогда по теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

- *левый*

$$\exists\{x_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0-0,\ x_k<0,\ x_k>-1,\ y_k=-x_k \Rightarrow \{y_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0+0.$$

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \left[\begin{array}{c}\dfrac{y_k}{1-y_k}=z_k\\ \Rightarrow z_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0+0\end{array}\right] =$$

$$= (1+z_k)^{\frac{1}{z_k}+1} = \underbrace{(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}}}_{\to e} \cdot \underbrace{(1+z_k)}_{\to 1} \Rightarrow \lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. **[:||||:]**

3.3 Таблица эквивалентностей

Эквивалентность при $x\to 0$	Равенство при $x=0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + \bar{o}(x)$
$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} x = x + \bar{o}(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + \bar{o}(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x = x + \bar{o}(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + \bar{o}(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + \bar{o}(x)$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$	$(1+x)^m = 1 + mx + \bar{o}(x)$

Докажем все эти утверждения:

1. $\sin x \sim x \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $(1-\cos x) \sim \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot 2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1$.

3. $\operatorname{tg} x \sim x \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1$.

4. $\arcsin x \sim x \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = [y = \arcsin x] = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1$.

5. $\operatorname{arctg} x \sim x \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = [y = \operatorname{arctg} x] = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1$.

6. $e^x - 1 \sim x \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = [t = e^x - 1] = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$, т.к.:
$\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln e = 1.$

   Последний переход (от предела логарифма к логарифму предела) возможен, т.к. натуральный логарифм — *непрерывная функция*, о чем речь пойдет позднее.

7.

$$(1+x)^m - 1 \sim mx \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{m\ln(1+x)} - 1}{\dfrac{m\ln(1+x)}{\ln(1+x)} \cdot x} = \lim_{x\to 0} \boxed{\frac{e^{m\ln(1+x)} - 1}{m\ln(1+x)}} \cdot \boxed{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1.$$

Часть 12
Непрерывность функции

1 Понятие непрерывности

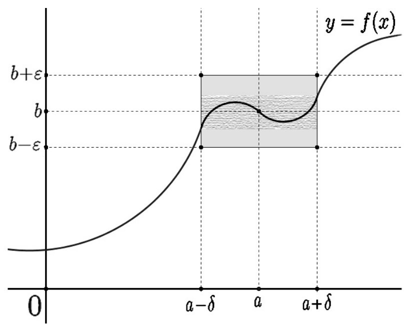
Пусть $f\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$. Будем называть функцию f **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{E}$, если

$$\forall \mathrm{V}(f(a))\ \exists \mathrm{U}(a) : \forall x \in \mathrm{U}(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow f(x) \in \mathrm{V}(f(a)),\ \text{ т.е. } f(\mathrm{U}(a) \cap \mathbb{E}) \subset \mathrm{V}(f(a)).$$

Тем самым подразумевается, что f определена в точке a. Можно записать это же определение в более понятном виде:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{E},\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Важно понимать, что из непрерывности функции не следует, что ее можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Более того, в определении ничего не говорится о том, что для непрерывности в a точка a должна быть предельной. Рассмотрим следующий пример:



$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0;1], \\ 3, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

Как видно, $\mathbb{E}[f] = [0;1] \cup \{2\}$. Заметим, что $a = 2$ — изолированная точка множества $\mathbb{E}$. Но тогда $\exists \tilde{\mathrm{U}}(a) : \tilde{\mathrm{U}}(a) \cap \mathbb{E} = \{a\}$, $f(\tilde{\mathrm{U}}(a) \cap \mathbb{E}) = f(a) \subset \mathrm{V}(f(a))$ для $\forall \mathrm{V}(f(a))$. Таким образом, функция f непрерывна в точке $a = 2$. Однако везде далее будем считать, что a — предельная точка множества $\mathbb{E}$.

Будем называть функцию f непрерывной в точке a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Это нетрудно понять, если обратить внимание на почти полную эквивалентность определений предела функции и непрерывности в a. Непрерывность в точке a обозначается следующим образом: $f(x) \in \mathrm{C}(a)$.

Функция f **непрерывна на множестве** $\mathbb{X}$, если она непрерывна в любой точке этого множества.

- $f(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$, т.к. $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

- $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$, т.к. $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sin x - \sin a| = |2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}| \leqslant 2|\sin \frac{x-a}{2}| \leqslant 2|\frac{x-a}{2}| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

$f(x)$ **непрерывна в** a **справа (слева)**, если $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \left(\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \right) = f(a)$. Будем говорить, что $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, если f непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[a; b]$ (т.е. на $(a; b)$) и непрерывна в a справа и в b слева.

2 Свойства непрерывных функций

2.1 Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема 12.1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в a, тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ также являются непрерывными в точке a.*

Доказательство. Рассмотрим сумму $(f(x) + g(x))$. Для остальных операций доказательство практически аналогично. По определению $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. Но тогда, используя свойство суммы для пределов, получаем, что $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$, что означает, что $(f(x) + g(x))$ непрерывна в точке a. **[:||||:]**

2.2 Непрерывность композиции функций

Теорема 12.2. $\exists f \colon \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $g \colon \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) \subset \mathbb{Y}$. *Тогда если $f(x) \in \mathrm{C}(x_0)$, а $g(y) \in \mathrm{C}(y_0 = f(x_0))$, то $g(f(x)) \in \mathrm{C}(x_0)$.*

Доказательство. Снова по определению $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$. Но тогда, пользуясь теоремой о пределе композиции функций, получаем, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0))$, что по определению означает, что $g(f(x)) \in \mathrm{C}(x_0)$. **[:||||:]**

Будем говорить, что $f(x)$ **терпит разрыв** в a, если она не является непрерывной в точке a, т.е.:

$$\exists \mathrm{V}(f(a)) : \forall \mathrm{U}(a)\ \exists x \in (\mathrm{U}(a) \cap \mathbb{E}) : f(x) \notin \mathrm{V}(f(a)) \text{ или по-другому}$$
$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{E},\ |x - a| < \delta,\ \text{но } |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0.$$

- $f(x) = \operatorname{sgn} x$ терпит разрыв в $a = 0$. $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1 \neq f(0) = 0 \neq \lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$.

- $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ тоже терпит разрыв в $a = 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$.

- $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ терпит разрыв в $a = 0$, т.к. $\nexists \lim\limits_{x \to 0-0} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Как видно из этих примеров, бывают разные случаи разрывов, поэтому попробуем их классифицировать.

3 Классификация точек разрыва

1. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, но либо $f(x)$ не определена в a, либо данный предел не равен значению в данной точке, то a — **устранимый разрыв**. Иными словами, мы можем переопределить функцию в точке a так, чтобы она стала непрерывной. Например, если переопределить $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ как $f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sgn} x|, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$, то она станет непрерывной в $a = 0$.

2. Если $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \alpha$, $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \beta$, но $\alpha \neq \beta$, то a — **разрыв I рода**. Например, при $a = 0$ в $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

3. Если не существует или равен $\pm\infty$ хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, то a — **разрыв II рода**.

Важно отметить, что при классификации точек необходимо проверять сначала более «сильные» критерии. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не определена. Однако, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$, т.е. $x = 0$ — точка разрыва II рода.

Будем говорить, что $f(x)$ — **кусочно-непрерывная** на $[a;b]$, если $f(x)$ непрерывна на нем за исключением конечного числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в которых у $f(x)$ существуют односторонние пределы, а также существуют $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

4 Точки разрыва монотонной функции

- $f(x)$ *монотонно возрастает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{E} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- $f(x)$ *монотонно неубывает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{E} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- $f(x)$ *монотонно убывает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{E} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- $f(x)$ *монотонно невозрастает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{E} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Лемма 12.3. *Если $f(x)$ монотонна на $[a;b]$, то в любой точке из интервала $(a;b)$ существуют оба односторонних предела.*

Доказательство. Без потери общности предположим, что $f(x) \nearrow$ на $[a;b]$. Пусть точка $c \in (a;b)$.

Рассмотрим множество $\{f(x)\}$ — множество значений $f(x)$ в точках $x \in (c;b]$. Оно не пусто, т.к. $f(b) \in \{f(x)\}$. Кроме того, $\{f(x)\}$ является ограниченным снизу, т.к. $f(x) \geqslant f(c)$ $\forall x \in (c;b] \Rightarrow \exists \inf\{f(x)\} = \gamma$. Докажем, что $\gamma = \lim\limits_{x\to c+0} f(x)$. Поскольку $\gamma = \inf\{f(x)\}$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta \in (0; b-c) : f(c+\delta) < \gamma + \varepsilon$. Т.к. $f(x) \nearrow$, то $\forall x \in (c; c+\delta)$ значения $f(x)$ будут заведомо меньше $\gamma + \varepsilon$. Тогда получаем, что $\gamma - \varepsilon < \gamma \leqslant f(x) < \gamma + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - \gamma| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \gamma$.

Теперь рассмотрим множество $\{f(x)\}$ — множество значений $f(x)$ в точках $x \in [a;c)$. Оно не пусто, т.к. $f(a) \in \{f(x)\}$. Кроме того, $\{f(x)\}$ является ограниченным сверху, т.к. $f(x) \leqslant f(c)$ $\forall x \in [a;c) \Rightarrow \exists \sup\{f(x)\} = \gamma$. Докажем, что $\gamma = \lim\limits_{x\to c-0} f(x)$. Поскольку $\gamma = \sup\{f(x)\}$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta \in (0; c-a) : f(c-\delta) > \gamma - \varepsilon$. Т.к. $f(x) \nearrow$, то $\forall x \in (c-\delta; c)$ значения $f(x)$ будут заведомо больше $\gamma - \varepsilon$. Тогда получаем, что $\gamma - \varepsilon < f(x) \leqslant \gamma < \gamma + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - \gamma| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \gamma$. **[:|||||:]**

Теорема 12.4. *Пусть $f(x)$ монотонна. Тогда у нее могут существовать только точки разрыва I рода.*

Доказательство. Снова без потери общности предположим, что $f(x)$ монотонно неубывает. $f(x) \nearrow \Rightarrow \forall c \in (a;b), \forall x < c \Rightarrow f(x) \leqslant f(c) \Rightarrow f(c-0) \leqslant f(c)$. Если в данном неравенстве стоит знак $=$, то функция непрерывна в точке c, если же стоит знак $<$, то она терпит разрыв I рода в c. **[:||||:]**

Часть 13
Локальные и глобальные свойства непрерывных функций

Будем называть *локальными* те свойства, которые справедливы в любой окрестности фиксированной точки из области определения функции. *Глобальными* же назовем свойства, связанные со всей областью определения функции.

1 Локальные свойства

1.1 Локальная ограниченность функции, имеющей конечный предел

Теорема 13.1. $\exists f\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) < \infty$. *Тогда* $\exists \delta > 0 : f(x)$ *ограничена на множестве* $\mathrm{U}_\delta(a) \cap \mathbb{E}$.

Доказательство. $\exists\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Если $a \notin \mathbb{E}$, то получили границы для $f(x)$, т.е. теорема доказана. Если же $a \in \mathbb{E}$, то примем $m = \min\{b - \varepsilon; f(a)\}$, $M = \max\{b + \varepsilon; f(a)\} \Rightarrow \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow m \leqslant f(x) \leqslant M$. **[:||||:]**

Следствие 13.2. *Если* $f(x) \in \mathrm{C}(a)$*, то* $\exists \delta > 0 : f(x)$ *ограничена на* $\mathrm{U}_\delta(a)$.

1.2 Сохранение знака непрерывной в точке функции

Теорема 13.3. *Пусть* $f\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}(a)$, $a \in \mathbb{E}$ *и* $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$. *Тогда* $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ $\forall x \in \mathrm{U}_\delta(a) \cap \mathbb{E}$.

Доказательство. Так как $f(x) \in \mathrm{C}(a)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a) \cap \mathbb{E} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$, тогда $f(a) - \varepsilon > 0$ при $f(a) > 0$ и $f(a) + \varepsilon < 0$ при $f(a) < 0$, т.е. левая и правая части неравенства всегда одного знака, значит $\forall x \in \mathrm{U}_\delta(a) \cap \mathbb{E}$ выполнено требуемое. **[:||||:]**

Будем говорить, что $[a; a + \delta)$ — правая δ-полуокрестность точки a, а $(a - \delta; a]$ — левая δ-полуокрестность. Заметим, что сохранение знака справедливо для функции, непрерывной в точке a справа (слева). В этом случае абсолютно так же предъявляется соответствующая правая (левая) δ-полуокрестность.

2 Глобальные свойства

2.1 Прохождение непрерывной функции через 0 при смене знаков

Теорема 13.4. *Пусть* $f(x) \in \mathrm{C}[a;b]$ *(т.е. непрерывна на отрезке* $[a;b]$*) и* $f(a) \cdot f(b) < 0$*. Тогда* $\exists p \in (a;b) : f(p) = 0$*.*

Доказательство. Без потери общности предположим, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Пусть A — множество всех $x \in [a;b] : f(x) < 0$. Заметим, что $A \neq \varnothing$ (т.к. $a \in A$) и ограничено сверху, т.к. $\forall x \in A \Rightarrow x < b$. Тогда $\exists \sup A = p$. Заметим, что $p \in (a;b)$, т.к. из условий $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ и в силу теоремы 13.3 существует правая δ_1-полуокрестность точки $a : \forall x \in [a; a+\delta_1) \Rightarrow f(x) < 0$ и существует левая δ_2-полуокрестность точки $b : \forall x \in (b - \delta_2; b] \Rightarrow f(x) > 0$. Докажем, что $f(p) = 0$. Предположим противное, тогда по теореме 13.3 нашлась бы δ-окрестность точки p, в которой функция имела бы определенный знак, но это невозможно, т.к. по определению $\sup A$ хотя бы для одного $x \in (p - \delta; p] \Rightarrow f(x) < 0$ и хотя бы для одного $x \in (p; p+\delta) \Rightarrow f(x) \geqslant 0$. Получили противоречие. **[:||||:]**

2.2 Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение

Теорема 13.5. $\exists f \in \mathrm{C}[a;b]$*, причем* $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$*. Пусть* $\gamma \in [\min\{\alpha;\beta\}; \max\{\alpha;\beta\}]$*. Тогда* $\exists p \in [a;b] : f(p) = \gamma$*.*

Доказательство. Если $\alpha = \gamma$, или $\beta = \gamma$, или вообще $\alpha = \beta = \gamma$, то p определяется тривиально. Пусть $\alpha \neq \beta$. Без потери общности считаем, что $\alpha < \gamma < \beta$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. Тогда $g(x) \in \mathrm{C}[a;b]$ и принимает на концах значения разных знаков (т.к. $g(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$, $g(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0$). Но тогда $\exists p : g(p) = 0$, т.е. $f(p) - \gamma = 0 \Leftrightarrow f(p) = \gamma$. **[:||||:]**

2.3 Критерий непрерывности монотонной функции

Следствие 13.6. *Монотонная функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$ *т.и.т.т., когда она принимает все промежуточные значения.*

Часть 14
Теоремы Вейерштрасса

> Уже забыл я запах водки и дни, когда я пьяный был.
> Я изменил свою походку, но теорему Вейерштрасса не забыл.
>
> Народный фольклор

1 Первая теорема Вейерштрасса

Теорема 14.1. *Если* $f(x) \in \mathrm{C}[a;b]$*, то* f *ограничена на этом множестве.*

Доказательство. От противного. Пусть $f(x)$ не ограничена сверху. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется хотя бы одна точка $x_n \in [a;b] : f(x_n) > n$ (т.к. иначе функция была бы ограничена сверху) $\Rightarrow$ $\{f(x_n)\}$ — бесконечно большая. Т.к. $\{x_n\} \subset [a;b]$, то $\{x_n\}$ ограничена. Отсюда по теореме Больцано-Вейерштрасса существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = p$. Тогда по принципу двустороннего ограничения $p \in [a;b]$. Т.к. $f(x) \in \mathrm{C}[a;b] \Rightarrow \{f(x_{n_k})\} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(p)$. Но это противоречит тому, что подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$, будучи выделенной из бесконечно большой последовательности, сама является бесконечно большой. Доказательство существования нижней границы аналогично. **[:|||||:]**

Заметим, что данная теорема не справедлива для интервалов. Например, $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на множестве $(0;1)$, но не является ограниченной на нем.

Будем говорить, что M (m) — **точная верхняя грань (нижняя)** $f(x)$ на $\mathbb{E}$, если выполняется:

1. $\forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$.

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \mathbb{E} : f(x') > M - \varepsilon$ $(f(x') < m + \varepsilon)$.

Как и для множеств, справедливо то, что если $f(x)$ ограничена сверху (снизу) на $\mathbb{E}$, то существует точная верхняя (нижняя) грань. Обозначения: $M = \sup\limits_{\mathbb{E}} f(x)$, $m = \inf\limits_{\mathbb{E}} f(x)$. Стоит заметить, что точная верхняя и нижняя грань достигаются на области определения функции далеко не всегда. Рассмотрим следующий пример:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in (0;1), \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in \{0,1\}. \end{cases}$$

$\sup f(x) = 1$ не достигается, т.к. $\nexists x \in [0;1] : f(x) = 1$. Аналогично и для инфимума.

2 Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема 14.2. *Если $f(x) \in \mathrm{C}[a;b]$, то она достигает своей точной верхней и нижней граней (т.е. $\exists x_1, x_2 \in [a;b] : f(x_1) = \sup\limits_{\mathbb{E}} f(x)$, $f(x_2) = \inf\limits_{\mathbb{E}} f(x)$).*

Доказательство. По первой теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, а значит у нее существуют точная верхняя и нижняя грань. Докажем достижимость точной верхней грани M, достижимость нижней доказывается аналогично.

От противного. Пусть M недостижима, т.е. $\forall x \in [a;b] \Rightarrow f(x) < M$. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Тогда $\forall x \in [a;b] \Rightarrow M - f(x) > 0$ и $(M - f(x)) \in \mathrm{C}[a;b]$. Пользуясь арифметическими операциями с непрерывными функциями получаем, что $g(x)$ также непрерывна на $[a;b]$. Значит, по первой теореме Вейерштрасса $\exists A : \forall x \in [a;b] \Rightarrow g(x) \leqslant A$. $M - f(x) > 0 \Rightarrow f(x) \leqslant M - \frac{1}{A}$, а это противоречит тому, что M является точной верхней гранью. **[:|||||:]**

Часть 15

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1 Производная функции

1.1 Понятие производной

Рассмотрим $f(x)$, определенную на $(a;b)$. Пусть $x \in (a;b)$ — предельная точка. Выберем $\Delta x : x + \Delta x \in (a;b)$. Будем говорить, что Δx — **приращение аргумента**. Величина $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ называется **приращением функции** f**, отвечающим приращению аргумента**.

Из этого можно вывести иное определение непрерывности функции в точке, называемое ***разностной формой непрерывности***:

$$f(x) \in \mathrm{C}(x) \Leftrightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0.$$

Назовем **производной функции** f **в точке** x

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.}$$

Или, что то же самое, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Рассмотрим несколько примеров:

1. $f(x) = c = const$.
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

2. $f(x) = x$.
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1.$$

3. $f(x) = \sin x$.
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

4. $f(x) = \cos x$.
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(- \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = - \sin x.$$

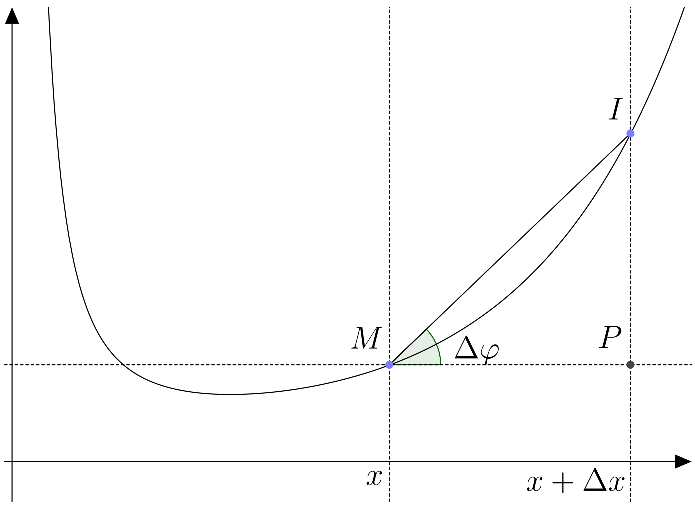
1.2 Односторонние производные

Назовем **левой (правой) производной** функции $f(x)$ в точке x левый (правый) предел $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0 \mp 0$. Обозначения: $f'_-(x)$ или $f'(x-0)$ для левой и $f'_+(x)$ или $f'(x+0)$ для правой. Из утверждений для односторонних пределов вытекает:

1. Если $\exists f'(x)$, то $\exists f'_-(x)$, $f'_+(x)$, причем $f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$.
2. Если $\exists f'_-(x)$, $f'_+(x)$ и $f'_-(x) = f'_+(x)$, то $\exists f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$.
3. Если $\exists f'_-(x) \neq f'_+(x)$, тогда $\nexists f'(x)$.

Например, пусть $f(x) = |x|$. Тогда $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$, в то время как $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1 \neq -1 \Rightarrow \nexists f'(0)$.

1.3 Геометрическая интерпретация производной



Заметим, что $\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \Delta\varphi = \operatorname{arctg} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Пусть $\varphi_0 = \lim\limits_{I \to M} \Delta\varphi$. Иными словами, φ_0 — угол наклона касательной в точке x. Тогда $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right) = \operatorname{arctg} f'(x) \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x)$.

2 Дифференцируемость функции

Назовем функцию $f(x)$ **дифференцируемой в точке** x, если $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, где A не зависит от Δx, а $\bar{o}(\Delta x) = \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Теорема 15.1 (*критерий дифференцируемости*). *$f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда $\exists f'(x)$, причем $A = f'(x)$.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x \Rightarrow \Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\bar{o}(\Delta x)}{\Delta x} = A + \bar{o}(1)$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \Rightarrow A = f'(x)$.

- ***Достаточность.***

  Пусть $\exists f'(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Рассмотрим $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, т.е. $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(1) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \bar{o}(1) \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$.

[:|||||:]

Теорема 15.2 (***связь дифференцируемости и непрерывности***)**.** *Если $f(x)$ дифференцируема в точке x, то $f(x) \in \mathrm{C}(x)$.*

Доказательство. $\Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$, из чего получаем разностную форму непрерывности. **[:|||||:]**

Заметим, что ***обратное неверно***. Например, $f(x) = |x|$ непрерывна в 0, но не дифференцируема в нем.

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда $\Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$. Заметим, что $f'(x)\Delta x$ — главная часть приращения функции. Назовем эту величину **дифференциалом функции в точке** x и обозначим как $dy = f'(x)\Delta x$. Введем также понятие **дифференциала аргумента** x:

- Если x — независимая переменная, то $dx = \Delta x$.
- Если $x = \varphi(t)$, то $dx = \varphi'(t)dt$.

Часть 16
Теоремы о дифференцируемости функций I

1 Правила дифференцирования

Теорема 16.1 (***дифференцирование сложной функции***)**.** *Если $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем $f'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0) = (f(\varphi(t_0)))'\varphi'(t_0)$.*

Доказательство. $\Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. $\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}$ $(**)$. Из дифференцируемости $x = \varphi(t)$ вытекает, что $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ имеет предел в точке t_0, равный $\varphi'(t_0)$. Заметим, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta x = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) = 0$. Но при $\Delta x \to 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x) \to 0$. Переходя к пределу в правой части $(**)$, получаем:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x)\varphi'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

[:|||||:]

Теорема 16.2 (***дифференцирование обратной функции***)**.** *Пусть $f\colon \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ и $f^{-1} : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$ — взаимно обратные функции. Причем $f(x) \in \mathrm{C}(x_0)$, а $f^{-1}(y) \in \mathrm{C}(y_0 = f(x_0))$. Тогда если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то $f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке y_0, причем $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. $x \to x_0 \in \mathbb{X} \Leftrightarrow y \to y_0 \in \mathbb{Y}$. Заметим, что $f^{-1}(y_0) = x_0$, а $f^{-1}(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$, т.к. $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$.

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

[:|||||:]

Теорема 16.3 (***арифметические операции над дифференцируемыми функциями***)**.** *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то* $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ *также дифференцируемы в точке* x, *причем* $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Доказательство. Будем считать, что Δf отвечает приращению $f(x)$, Δg отвечает приращению $g(x)$, а Δh отвечает приращению $h(x)$.

1. $h(x) = f(x) \pm g(x)$.

$$\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x)) =$$
$$= (f(x + \Delta x) - f(x)) \pm (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f \pm \Delta g.$$

Таким образом,
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$
При $\Delta x \to 0$ существует предел правой части, равный $f'(x) \pm g'(x)$, а значит, существует и предел левой части
$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

2. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$$\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) =$$
$$= (f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x)) + (f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)).$$

Далее можно записать
$$\Delta h = f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + g(x)(f(x + \Delta x) - f(x)) = f(x + \Delta x)\Delta g + g(x)\Delta f.$$

Таким образом,
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f(x + \Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$
Возьмем теперь предел правой части при $\Delta x \to 0$. В силу непрерывности $f(x)$ в x (т.к. она дифференцируема в этой точке) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Тогда получаем, что
$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

3. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Поскольку $g(x) \neq 0$, то по теореме об устойчивости знака $g(x + \Delta x) \neq 0$ для малых Δx. Тогда

$$\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+\Delta x)g(x) - g(x+\Delta x)f(x)}{g(x)g(x+\Delta x)} =$$
$$= \frac{(f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)) - (g(x+\Delta x)f(x) - f(x)g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)} =$$
$$= \frac{g(x)(f(x+\Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)} = \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)g(x+\Delta x)}.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g(x)\dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)}.$$

Снова используя непрерывность и беря предел правой и левой частей, получаем, что

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

[:|||||:]

2 Функции, заданные параметрически

Если зависимость функции y от переменной x задана посредством t, т.е. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где $t \in \mathbb{T}$, то будем говорить, что $y = y(x)$ задана *параметрически*, причем t — *параметр*.

Теорема 16.4 (***дифференцирование функций, заданных параметрически***)**.** *Пусть φ и ψ дифференцируемы на $\mathbb{T}$ и в некоторой окрестности x_0 существует функция, обратная к φ, т.е. $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда $y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.*

Доказательство. Заметим, что $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Имеем: $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$. Поскольку $dy = y'(x)dx$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. **[:|||||:]**

Часть 17
Теоремы о дифференцируемых функциях II

Будем говорить, что $y = f(x)$ возрастает (убывает) в точке c, если $\exists \mathrm{U}(c) : \forall x \in \mathrm{U}(c) \Rightarrow \forall x < c \Rightarrow f(x) < f(c)$ $(f(x) > f(c))$, а $\forall x > c \Rightarrow f(x) > f(c)$ $(f(x) < f(c))$. Функция $y = f(x)$ имеет **локальный максимум (минимум)** в точке c, если $\exists \mathrm{U}'(c) : \forall x \in \mathrm{U}'(c) \Rightarrow f(x) < f(c)$ $(f(x) > f(c))$.

Если в определениях использовать нестрогие знаки, то функция не убывает (не возрастает), а локальный максимум/минимум называются нестрогими.

Функция $y = f(x)$ имеет **локальный экстремум** в некоторой точке, если она имеет локальный минимум или локальный максимум в данной точке.

Теорема 17.1 (***достаточное условие возрастания/убывания в точке***)**.** *Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c, а $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), то $f(x)$ возрастает (убывает) в точке c.*

Доказательство. Пусть $f'(c) > 0$. Другой случай рассматривается аналогично.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon.$$

$$\exists \varepsilon = f'(c) \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < f'(c) \Leftrightarrow 0 < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 2f'(c).$$

Из чего вытекает требуемое, т.к. для выполнения $0 < \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ нужно, чтобы знак числителя совпадал со знаком знаменателя. **[:|||||:]**

Важно отметить, что условие из теоремы 17.1 не является необходимым для возрастания (убывания) функции $f(x)$ в точке c. Например, $f(x) = x^3$. Тогда $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, но $f(x)$, очевидно, возрастает в точке 0.

Теорема 17.2 (***Теорема Ферма***)**.** *Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f(x)$ имеет локальный экстремум в этой точке. Тогда $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Если $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке c, то она не убывает и не возрастает в точке c. Тогда по теореме 17.1 не может выполняться $f'(c) > 0$ или $f'(c) < 0$. Значит, $f'(c) = 0$. **[:|||||:]**

Заметим, что данное условие является лишь необходимым, но не достаточным для существования экстремума в точке. В качестве примера опять-таки можно привести $f(x) = x^3$ при $c = 0$.

Геометрический смысл данной теоремы состоит в том, что если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке c, то касательная в этой точке параллельна оси абсцисс.

Теорема 17.3 (***Теорема Ролля***)**.** *Если выполнено:*

1. $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$.
2. $f(x)$ *дифференцируема на* (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Т.к. $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего значения M и наименьшего значения m.

- Если $M = m$, то $f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$.
- Если $M > m$, то хотя бы один из всех локальных экстремумов достигается внутри (a, b) в некоторой точке ξ. По теореме Ферма $f'(\xi) = 0$.

[:|||||:]

Т.к. дифференцируемая функция является непрерывной, то вместо условия 1 достаточно требовать лишь непрерывность слева в b и справа в a. Однако полностью отказаться от условия непрерывности в теореме нельзя. Например:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Условия 2 и 3, очевидно, выполняются, но не существует такой ξ, что $f'(\xi) = 0$. Это происходит потому, что данная функция терпит разрыв в точке $x = 1$.

Геометрический смысл данной теоремы в том, что существует точка на (a, b), касательная в которой параллельна оси абсцисс.

Часть 18
Теоремы о дифференцируемых функциях III

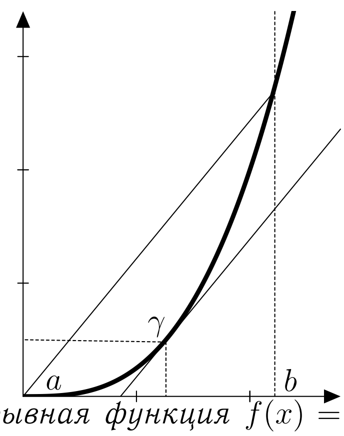
Теорема 18.1 (***Теорема Лагранжа***)**.** *Если выполнено:*

1. $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$.
2. *$f(x)$ дифференцируема на (a, b).*

Тогда $\exists\gamma \in (a, b)$, для которой $f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a)$ (иногда γ записывают как $a + \Theta(b - a)$, где $0 < \Theta < 1$).

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Эта функция непрерывна (как композиция непрерывных функций) и дифференцируема (как композиция дифференцируемых функций). Также, $F(a) = f(a) - 0 = f(a)$ и $F(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$, т.е. $F(a) = F(b)$. Значит, для данной функции выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда $\exists\gamma \in (a, b) : F'(\gamma) = 0 = f'(\gamma) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a)$. **[:|||||:]**

Геометрический смысл данной теоремы в том, что $\exists\gamma \in (a, b)$, такая, что касательная в этой точке будет параллельна хорде, соединяющей $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$.



Следствие 18.2. *Если $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a, b).*

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. На этом отрезке выполнены все условия теоремы Лагранжа, тогда $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\gamma)$. Т.к. $x_2 > x_1$ и $f'(\gamma) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$. В случае же, когда $f'(\gamma) < 0$, выполняется $f(x_2) < f(x_1)$. **[:|||||:]**

Следствие 18.3 (***критерий постоянства***)**.** *Для того, чтобы непрерывная функция $f(x) = const$ на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0\ \forall x \in [a; b]$.*

Доказательство. Необходимость была доказана ранее. Докажем достаточность. Снова рассмотрим отрезок $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$. На этом отрезке выполнены все условия теоремы Лагранжа, тогда

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \text{ (т.к. } x_2 \neq x_1) \Rightarrow f(x) = const.$$

[:||||:]

Теорема 18.4 (*Теорема Коши о конечном приращении*). *Пусть для функций $x(t)$ и $y(t)$ выполнено:*

1. $x(t), y(t) \in \mathrm{C}[\alpha, \beta]$.
2. $x(t), y(t)$ *дифференцируемы на* (α, β).

Тогда:

1. $\exists \tau \in (\alpha, \beta) : x'(\tau)(y(\beta) - y(\alpha)) = y'(\tau)(x(\beta) - x(\alpha))$.
2. *Если* $x'(t) \neq 0$ *для* $\forall t \in [\alpha, \beta]$, *то* $\frac{y(\beta)-y(\alpha)}{x(\beta)-x(\alpha)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}$.

Доказательство.

1. Рассмотрим функцию $F(t) = x(t)(y(\beta) - y(\alpha)) - y(t)(x(\beta) - x(\alpha))$. Для нее выполняются свойства 1 и 2. Заметим также, что

$$F(\alpha) = x(\alpha)y(\beta) - x(\alpha)y(\alpha) - y(\alpha)x(\beta) + y(\alpha)x(\alpha) = x(\alpha)y(\beta) - y(\alpha)x(\beta),$$
$$F(\beta) = x(\beta)y(\beta) - x(\beta)y(\alpha) - y(\beta)x(\beta) + y(\beta)x(\alpha) = -x(\beta)y(\alpha) + y(\beta)x(\alpha).$$

   Т.е. $F(\alpha) = F(\beta)$, тогда по теореме Ролля $\exists \tau \in (\alpha, \beta) : F'(\tau) = 0$. Но $F'(\tau) = x'(\tau)(y(\beta) - y(\alpha)) - y'(\tau)(x(\beta) - x(\alpha))$, т.е. $x'(\tau)(y(\beta) - y(\alpha)) = y'(\tau)(x(\beta) - x(\alpha))$.

2. Если $x'(\tau) \neq 0$, то $x(\alpha) \neq x(\beta)$, т.к. в противном случае выполнялась бы теорема Ролля. Из последнего неравенства и пункта 1 непосредственно получаем доказываемое.

[:||||:]

Заметим, что между теоремами Коши, Лагранжа и Ролля существует тесная связь. Если в формуле Коши принять $y(t) = t$, то получим теорему Лагранжа. Действительно:

$$\frac{x(\beta) - x(\alpha)}{y(\beta) - y(\alpha)} = \frac{x'(\tau)}{y'(\tau)} \Rightarrow \frac{x(\beta) - x(\alpha)}{\beta - \alpha} = x'(\tau) \Leftrightarrow x(\beta) - x(\alpha) = x'(\tau)(\beta - \alpha).$$

Если же $x(\alpha) = x(\beta)$, то по формуле Лагранжа получаем теорему Ролля.

$$x(\beta) - x(\alpha) = x'(\tau)(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow x'(\tau) = 0.$$

Часть 19

Производные высших порядков

1 Определение

Рассмотрим функцию $f(x)$, дифференцируемую на множестве $\mathbb{E}$. Т.е. $\exists f'(x)$. Если $f'(x)$ тоже дифференцируема на $\mathbb{E}$, то $\exists (f'(x))' = f''(x)$. Аналогично, если $f''(x)$ дифференцируема на $\mathbb{E}$, то $\exists f'''(x) = f^{(3)}(x)$. **Производной n-ого порядка** будем считать $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, причем $f^{(0)}(x) = f(x)$. Разумеется, для существования производной n-ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функций, имеющих все производные до порядка n включительно на множестве $\mathbb{E}$, обозначается $\mathrm{C}^{(n)}(\mathbb{E})$.

Рассмотрим несколько примеров:

- $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin(\pi + x),$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right),$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x.$$

  Докажем по индукции, что $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$. При $n = 1$ уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором n, докажем для $n = n + 1$.

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right).$$

- $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$.

- $f(x) = x^m$. Беря n раз производную, получаем, что $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$.

- $f(x) = \ln x$. $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$. Тогда получаем, что $f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x^{-1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

2 Формула Лейбница

Теорема 19.1. *Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют не менее n производных на множестве $\mathbb{E}$. Тогда $(u \cdot v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$.*

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$, $(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum\limits_{k=0}^{1} C_1^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$. Пусть равенство верно при некотором n, докажем его справедливость при $n = n + 1$. Беря по определению производную $(u \cdot v)^{(n+1)}$:

$$(u \cdot v)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} = C_n^0 \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} +$$

$$+ C_n^n \cdot u \cdot v^{(n+1)} = C_n^0 \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + C_n^n \cdot u \cdot v^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)}.$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-k+1)n! + kn!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k.$$

[:||||:]

3 Инвариантность формы дифференциала

3.1 Инвариантность первого дифференциала

Пусть $y = y(x)$ — дифференцируемая функция, где x — независимая переменная. Тогда, как известно, $dy = y'(x)dx$. Пусть теперь $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$. Значит, $y = y(\varphi(t))$ и, дифференцируя сложную функцию, получаем $dy = y'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = y'(\varphi)dx = y'(x)dx$. Получили то же выражение, что и в случае, когда x независим. Это свойство дифференциала и называется **инвариантностью его формы**.

3.2 Нарушение инвариантности для дифференциалов высших порядков

Пусть теперь $y = y(x)$ — дважды дифференцируемая функция, а x либо независимая переменная, либо также дважды дифференцируемая функция. Назовем **дифференциалом второго порядка** выражение $d^2y = d(dy)$. Эту запись следует отличать от похожей записи dy^2, которая представляет собой просто упрощенную форму записи $(dy)^2$. Распишем дифференциал 2 порядка как $d^2y = d(dy) = d(y'dx)$. Теперь необходимо рассмотреть два совершенно различных случая:

- x — независимая переменная. В этом случае мы имеем право считать, что dx *не зависит* от x и равен одному и тому же приращению аргумента Δx. Тогда получаем: $d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dx \cdot dx = y''dx^2$.

- $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ дважды дифференцируема. Тогда $d^2y = d(dy) = d(y'(x)dx) = d(y'(\varphi(t))\varphi'(t)dt)$. Теперь продифференцируем полученное выражение по t. Важно, что под знаком дифференциала стоит сложная функция, что стоит учитывать при взятии производной. Заметим также, что, аналогично первому случаю, dt не что иное, как константа:

$$\begin{aligned} d(y'(\varphi(t))\varphi'(t)dt) = (y''(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \varphi'(t)dt + y'(\varphi(t))\varphi''(t)dt)dt = \\ = y''(x) \cdot \varphi'(t)dt \cdot \varphi'(t)dt + y'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2. \end{aligned}$$

  В левом слагаемом имеем $(\varphi'(t)dt)^2 = (dx)^2 = dx^2$. Заметим также, что $d^2x = (\varphi'(t)dt)'dt = \varphi''(t)dt^2$ (правое слагаемое). Тогда в итоге получаем, что

$$d^2y = y''(x)dx^2 + y'(x)d^2x. \tag{1}$$

  Это не эквивалентно случаю 1. Таким образом, *инвариантность дифференциала второго порядка* (и, разумеется, тогда более высшего тоже) ***не выполняется***.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $x(t) = t^2$, $y(x) = x^2$. Забудем про то, что x — зависимая переменная. Тогда получим:

$$y(t) = t^4 \Rightarrow dy = 4t^3dt \Rightarrow d^2y = 12t^2dt^2,$$
$$dx = 2tdt \Rightarrow d^2x = 2dt^2,$$
$$y'(x) = 2x \Rightarrow dy = 2xdx = 2t^2 \cdot 2tdt = 4t^3dt,$$
$$y''(x) = 2 \Rightarrow d^2y = 2dx^2 = 2 \cdot 4t^2dt^2 = 8t^2dt^2 \neq 12t^2dt^2.$$

Как видно, выражение для dy получилось верным (в силу инвариантности 1 формы), а для d^2y нет. Теперь вспомним, что на самом деле $x = \varphi(t)$, и воспользуемся формулой 1:

$$d^2y = 2dx^2 \boxed{+2xd^2x} = 8t^2dt^2 + 4t^2dt^2 = 12t^2dt^2.$$

3.3 Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$. Как было показано ранее, $y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Возьмем теперь вторую производную функции y, используя инвариантность первой формы дифференциала:

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx} = \frac{(y'(x))'dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Часть 20
Равномерная непрерывность

1 Равномерная непрерывность

Будем говорить, что функция $f(x)$ **равномерно непрерывна** на множестве $\mathbb{E}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \mathbb{E}, \; |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Вспомним заодно определение непрерывности в точке x_0:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in \mathbb{E}, \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Можно заметить, что равномерная непрерывность является *глобальным* свойством функции, в то время как обычная непрерывность — *локальным*. Действительно, при равномерной непрерывности предъявляется δ, зависящее от ε, но ***не зависящее*** от x. При обычной непрерывности δ зависит в том числе и от x_0, поэтому для каждого x предъявляется свое значение δ.

Теорема 20.1. *Если $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{E}$, то $f(x)$ и непрерывна на $\mathbb{E}$.*

Доказательство. Если в определении принять $x' = x_0$, $x'' = x$, то получим определение непрерывности в точке x_0, что можно сделать для $\forall x_0 \in \mathbb{E}$. **[:||||:]**

Теорема 20.2. *Если $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{E}$, то $f(x)$ также равномерно непрерывна на любом $\mathbb{E}' \subset \mathbb{E}$.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения. **[:||||:]**

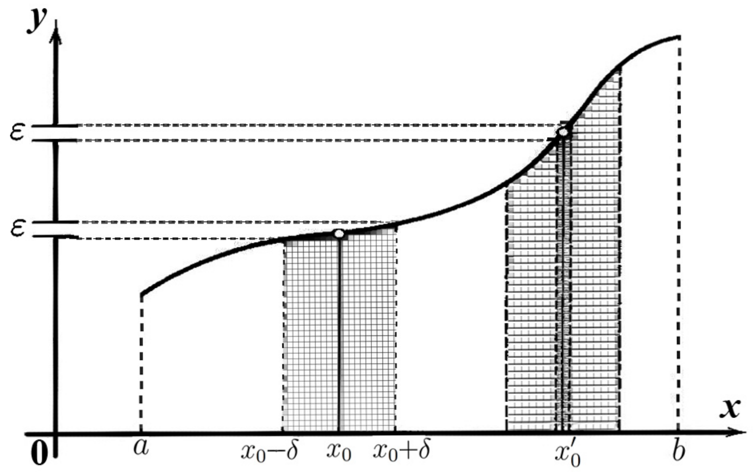
Утверждение 20.3. *Если $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{E}$, то, вообще говоря, она не является равномерно непрерывной на $\mathbb{E}$.*

Доказательство. Приведем контрпример. Пусть $f(x) = x^2$ и $\mathbb{E} = (1, +\infty)$. Напишем отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x', x'' \in (1, +\infty),\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0.$$

Будем считать, что $x_1 = x'$, $x_2 = x''$. $|f(x') - f(x'')| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2|$. Возьмем такое δ, что $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2}$. Заметим, что $|x_1 + x_2|$ может быть сколь угодно большим. Например, $\exists x_1, x_2 \in (1, +\infty) : |x_1 + x_2| > \frac{3}{\delta}$. Тогда получаем, что $|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| > \frac{3}{2} = \varepsilon_0$. **[:||||:]**

Таким образом, обратное утверждение неверно. На рисунке справа изображена некоторая непрерывная функция. Как видно, при одном и том же значении ε соответствующие δ-окрестности в точках x_0 и x_0' разные. Если же мы хотим увеличить δ' (окрестность x_0') до δ, то нужно увеличить и соответствующее ε'. В случае $f(x) = x^2$ для постоянного δ соответствующее ε будет неограниченно расти по мере роста x. Для равномерной же непрерывности необходимо, чтобы возможно было зафиксировать некоторую δ и предъявлять ее для ***любого*** ε.



Однако существуют условия, при которых непрерывная функция является и равномерно непрерывной.

Теорема 20.4 (*Теорема Кантора*). *Если $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0$. Примем $\delta = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n', x_n'' \in [a, b] : |x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon_0$. Т.к. $x_n', x_n'' \in [a, b]$, то последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ — ограниченные, а значит, $\exists \{x_{k_n}'\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n'\}$, и $\exists \{x_{k_n}''\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n''\}$, для которых $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}' = \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}'' = \xi'$. Но т.к. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{k_n}' - x_{k_n}''| < \frac{1}{n}$, то $\xi = \xi'$. x_{k_n}' и x_{k_n}'' также лежат на $[a, b]$, где $f(x)$ непрерывна. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}') = f(\xi)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}'') = f(\xi') = f(\xi)$. Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}') = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}'')$. Но это противоречит тому, что $|f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon_0$. **[:||||:]**

2 Модуль непрерывности и колебание функции на отрезке

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Тогда величина

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{x, x' \in [a, b]} |f(x') - f(x)|$$

называется **колебанием** функции f на отрезке $[a, b]$.

Модулем непрерывности $\omega(\delta, f)$ функции f, определенной на отрезке $[a, b]$, называется функция

$$\omega(\delta, f, [a, b]) = \sup_{|x' - x''| < \delta} |f(x'') - f(x')|, \text{ где } x', x'' \in [a, b].$$

Теорема 20.5. *$f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$ т.и.т.т., когда выполняется*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x_2 - x_1 < \delta, \; [x_1, x_2] \subset [a, b] \Rightarrow \omega(f, [x_1, x_2]) < \varepsilon.$$

Доказательство.

- ***Необходимость.*** Пусть для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. В таком случае для произвольных точек $\xi, \eta \in [x_1, x_2]$ получаем

$$0 < |\xi - \eta| \leqslant x_2 - x_1 < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу произвольности ξ и η имеем

$$\omega(f, [x_1, x_2]) = \sup_{\xi, \eta \in [x_1, x_2]} |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

- ***Достаточность.*** Пусть $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, такое что при $0 < x_2 - x_1 < \delta$, $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ выполняется неравенство $\omega(f, [x_1, x_2]) < \varepsilon$. В этом случае для отмеченных выше точек x_1 и x_2, связанных лишь соотношением $0 < x_2 - x_1 < \delta$, выполняется

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega(f, [x_1, x_2]) < \varepsilon.$$

А это и гарантирует равномерную непрерывность функции f на отрезке $[a, b]$.

[:|||||:]

Теорема 20.6. *Определенная на множестве $\mathbb{E}$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна на нем т.и.т.т., когда*

$$\lim_{\delta \to 0+0} \omega(\delta, f, \mathbb{E}) = 0.$$

Доказательство.

- ***Необходимость.*** Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве $\mathbb{E}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{E}, \; |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя то, что при расширении числового множества его точная верхняя грань может только не убывать, получаем, что если $0 < \delta' < \delta$, то

$$\sup_{|x_1 - x_2| < \delta'} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \sup_{|x_1 - x_2| < \delta} |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. если $0 < \delta' < \delta$, то $\omega(\delta', f, \mathbb{E}) < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{\delta \to 0+0} \omega(\delta, f, \mathbb{E}) = 0$.

- ***Достаточность.*** Пусть $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \omega(\delta, f, \mathbb{E}) = 0$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < \delta' < \delta \Rightarrow \omega(\delta', f, \mathbb{E}) < \varepsilon.$$

Выберем какое-нибудь из указанных δ'. Тогда при $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$, $|x_1 - x_2| < \delta'$ будем иметь

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \sup_{|x_1 - x_2| < \delta'} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega(\delta', f, \mathbb{E}) < \varepsilon,$$

т.е. функция f равномерно непрерывна на множестве $\mathbb{E}$.

[:||||:]

Часть 21
Раскрытие неопределенностей

1 Первое правило Лопиталя

Теорема 21.1. *Пусть есть функции $f(x)$ и $g(x)$, такие что:*

1. *f и g дифференцируемы на интервале (a, b), причем a и b конечны.*
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0.$
3. *$g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.*
4. *$\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.*

Тогда $\boxed{\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A.}$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, приняв, что $f(a) = g(a) = 0$. Поскольку в условии теоремы ничего не говорится о значениях функций в этой точке, это можно сделать. После этого $f(x), g(x) \in \mathrm{C}[a, b]$. Пусть $x \in (a, b)$, тогда для точек a и x выполняются все условия теоремы Коши, т.е.

$$\forall x \in (a, b)\ \exists \xi \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

По определению предела, $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : a < x < a + \delta \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$. Но для каждого x из указанного интервала найдется свое ξ_x, такое что $\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$. Но раз $\xi_x \in (a, x)$, то, очевидно, выполняется $\left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. **[:||||:]**

Чтобы применять теорему и для бесконечных интервалов (a, b), достаточно сделать замену $t = \frac{1}{x}$ и продифференцировать сложную функцию $\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)' = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$.

2 Второе правило Лопиталя

Теорема 21.2. *Пусть есть функции $f(x)$ и $g(x)$, такие что:*

1. *f и g дифференцируемы на интервале (a,b), причем a и b конечны.*
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$.
3. *$g'(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$.*
4. $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $\boxed{\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A.}$

Доказательство. Для начала положим, что $A \leqslant 0$ (при $A > 0$ доказательство практически аналогично приведенному). Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Тогда по определению предела $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Leftrightarrow \exists x_\varepsilon \in (a,b) : \forall x \in (a, x_\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$. Здесь мы просто приняли, что $x_\varepsilon = a+\delta$, в остальном же интерпретация определения предела не изменилась.

Выберем произвольное x из данного интервала (a, x_ε). Заметим, что выполняется теорема Коши:

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ где } a < x < \xi < x_\varepsilon < b.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}.$$

Заметим теперь, что $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} = 0$, т.к. $f(x_\varepsilon)$ и $g(x_\varepsilon)$ — константы. Тогда выберем для текущего закрепленного ε такое $\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (a, a+\delta),\ \delta + a < b \Rightarrow \left|\frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}\right| < \varepsilon, \left|\frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \varepsilon$. Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

Поскольку $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, то $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1 - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1 - 2\varepsilon$ и $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1 + \frac{8}{3}\varepsilon$. Учитывая, что

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathrm{U}'_\varepsilon(A)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left((A-\varepsilon)(1-2\varepsilon), (A+\varepsilon)\left(1+\frac{8}{3}\varepsilon\right)\right) =$$

$$= \left(A - (\varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2), A + \left(\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathrm{U}_\eta(A), \text{ где } \eta = \max\left\{\varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2, \varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2\right\}.$$

Как видно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta = 0$, а для любого сколь угодно малого η всегда можно найти соответствующее ε, такое, что все значения отношения функций попадут в заданную η-трубку. Это и означает, что предел отношения функций равен A. **[:||||:]**

Данная теорема также элементарно обобщается на случай бесконечных интервалов.

3 Применение на практике

Для начала заметим, что оба правила можно использовать и для вычисления пределов вида $\lim\limits_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}$, а также для классического случая $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. Соответствующие доказательства могут быть найдены в других источниках.

Пример вычисления (по первому правилу):

$$\lim_{x\to 0+0} x^{x^\varepsilon}\ (\varepsilon > 0) = \exp\left(\lim_{x\to 0+0} x^\varepsilon \ln x\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0+0}\frac{x^\varepsilon}{-\varepsilon}\right) = \exp(0) = 1.$$

Отметим также, что правила Лопиталя напрямую применимы только в случаях, когда имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Остальные неопределенности для применения правил Лопиталя нужно сводить к этим, например, в случае 1^∞:

$$\rceil \lim_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))\right) = \exp\left(\lim_{x\to a}\frac{\ln(f(x))}{1/g(x)}\right).$$

Т.е. получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Рассмотрим также выражение $\infty - \infty$:

$$\rceil \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{f(x)}}\right).$$

Т.е. неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Однако правило Лопиталя применимо далеко не всегда:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Последний предел не существует, поскольку:

$$x_n = 2\pi n \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
$$y_n = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Но, как легко показать, предел до «лопитирования» существует:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}} = 1.$$

Часть 22
Формула Тейлора

1 Постановка задачи

Предположим, что имеется некоторая функция $f(x)$ и надо исследовать ее поведение в некоторой точке x_0 или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (как пример того, что мы хотим узнать о функции в x_0) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен $P_n(x)$, что $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} P_n(x-x_0)$, а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что $x_0 = 0$. Тогда $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$. $P_n(0) = c_0$, а $P_n'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$, из чего следует, что $c_1 = P_n'(0)$. По аналогии можно получить, что $c_2 = \frac{P_n''(0)}{2}, \dots, c_n = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}$. Т.е. получаем, что $P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, тогда справедлива формула:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(f,x).}$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f,x)}_{\text{остаточный член}}.$$

Прежде чем подробнее изучить остаточный член, докажем следующую лемму.

Лемма 22.1. *Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0)$ *и* $\exists f'(x)$ *на некоторой* $\mathrm{U}(x_0)$. *Тогда* $(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x)$.

Доказательство.

$$r_n(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

$$(r_n(f,x))' = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = r_{n-1}(f',x),$$

т.к. $f^{(k+1)}(x_0) = (f')^{(k)}(x_0)$. Следует также обратить внимание на то, что дифференцирование $r_n(f,x)$ происходит по x, поэтому все члены суммы, кроме $(x-x_0)^k$, — константы. **[:||||:]**

2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа

Теорема 22.2 (*Форма Пеано (локальная форма остаточного члена)*). *Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0)$ *и* $\exists f^{(n-1)}(x)$ *в некоторой окрестности* $\mathrm{U}(x_0)$. *Тогда справедлива формула Тейлора, причем* $r_n(f,x) = \bar{o}((x-x_0)^n),\ x \to x_0$.

Доказательство. Докажем с помощью метода математической индукции. При $n=1$, $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\bar{o}(x-x_0)$, что верно, т.к. $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Предположим теперь, что теорема верна для ***произвольной функции*** f при $n=n-1$, и докажем ее при $n=n$.

Заметим сначала, что $r_n(f,x_0)=0$ (следует из обычной формулы Тейлора). Тогда $r_n(f,x) = r_n(f,x)-r_n(f,x_0) = (r_n(f,\xi))'(x-x_0)$, где $\xi \in (\min\{x,x_0\}, \max\{x,x_0\})$ по теореме Лагранжа. По лемме 22.1 получаем, что $(r_n(f,\xi))'(x-x_0) = r_{n-1}(f',\xi)(x-x_0)$. По предположению для *произвольной* функции f, у которой есть n-ая производная в x_0 и $(n-1)$-ая в окрестности x_0, можно выполнить индукционный переход для f', т.к. для r_{n-1} у $f'(x)$ существуют $(n-1)$-ая производная в x_0 и $(n-2)$-ая в окрестности x_0. Тогда $r_{n-1}(f',\xi)(x-x_0) = \bar{o}((\xi-x_0)^{n-1}))(x-x_0) = [|\xi-x_0|<|x-x_0| \Rightarrow \bar{o}((\xi-x_0)^{n-1}) = \bar{o}((x-x_0)^{n-1})] = \bar{o}((x-x_0)^{n-1})(x-x_0) = \bar{o}((x-x_0)^n)$. **[:||||:]**

Поскольку в формулировке теоремы явно полагается, что $x \to x_0$, то данная теорема не может применяться для интервалов.

Теорема 22.3 (*Форма Лагранжа*). *Пусть* $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *и* $\exists f^{(n)}(x)$, *причем* $f^{(n)}(x) \in \mathrm{C}[x_0,x]$. *Кроме того,* $\exists f^{(n+1)}(x)$ *на* (x_0,x). *Тогда справедлива формула Тейлора, причем* $r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, *где* $\xi \in (x_0,x)$.

Доказательство. Снова воспользуемся методом математической индукции. При $n=0$, $f(x) = f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$ — формула Лагранжа. Предположим теперь, что для произвольной функции f справедливо, что $r_{n-1}(f,x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$. При $n=n$ имеем:

$$\frac{r_n(f,x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f,x)-r_n(f,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} \text{ по ф. Коши} = \frac{(r_n(f,\eta))'}{(n+1)(\eta-x_0)^n} = \text{ по лемме 22.1}$$
$$= \frac{r_{n-1}(f',\eta)}{(n+1)(\eta-x_0)^n} = \frac{(f'(\xi))^{(n)}}{(n+1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

[:||||:]

Заметим, что иногда удобно представлять это ξ как $x_0+\Theta(x-x_0)$, где $\Theta \in (0,1)$. В формулировке и доказательстве данной теоремы предполагается, что $x_0 \leqslant x$. Однако и формулировка, и доказательство практически не меняются при $x_0 \geqslant x$.

3 Единственность разложения

Теорема 22.4. *Пусть в некоторой окрестности* $\mathrm{U}(x_0)$ *выполнено:* $f(x) = a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\bar{o}(x^n)$ *и* $f(x) = b_0+b_1x+\dots+b_nx^n+\bar{o}(x^n)$. *Тогда* $a_0=b_0$, $a_1=b_1, \dots, a_n=b_n$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = \bar{o}(x^n)$. Положим $x \to 0$, тогда $c_0 = a_0 - b_0 = \bar{o}(0) = 0$. Значит, написанное выражение приобретает вид $(a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = \bar{o}(x^n)$. Разделим его на x и снова получим, что $c_1 = a_1 - b_1 = 0$. Продолжая указанный процесс, получаем, что $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. **[:||||:]**

4 Разложение по формуле Маклорена

При $x_0 = 0$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется **формулой Маклорена**. Выведем 5 основных разложений по формуле Маклорена:

1. $f(x) = e^x$. Поскольку $f^{(n)}(0) = 1$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n).$$

2. $f(x) = \sin x$. Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n}).$$

3. $f(x) = \cos x$. Снова вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Тогда:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1}).$$

4. $f(x) = \ln(x+1)$. Снова опираясь на ранее полученные результаты,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Тогда учитывая, что $f(0) = 0$:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n).$$

5. $f(x) = (1+x)^m$, где $m \in \mathbb{R}$.

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1).$$

Значит,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n).$$

Часть 23
Исследование функций методами дифференциального исчисления I

1 Условия монотонности функций

Между характером монотонности дифференцируемой на (a, b) функции $f(x)$ и знаком ее производной существует следующая взаимосвязь:

1. $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$. Однако $f(x) \uparrow \not\Rightarrow f'(x) \geqslant 0$.
2. $f'(x) \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \nearrow \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$.
3. $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0$ (критерий постоянства).
4. $f'(x) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \searrow \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$.
5. $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$. Однако $f(x) \downarrow \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$.

Все утверждения, что из левой части следует правая, были доказаны ранее. Докажем, например, утверждение из пункта 1. Остальные доказываются аналогично.

Утверждение 23.1. $f(x) \uparrow \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$.

Доказательство. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Из условия $f(x) \uparrow$ следует, что $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$. Но тогда, пользуясь предельным переходом, получаем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$. **[:|||||:]**

2 Условия точек экстремума

Теорема 23.2 (*необходимое условие локального экстремума*). *Если $f(x) \in \mathrm{C}(x_0)$ и $f(x)$ дифференцируема в некоторой $\mathrm{U}'(x_0)$, причем $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то либо $\nexists f'(x_0)$, либо $f'(x_0) = 0$.*

Заметим, что данное утверждение является следствием из теоремы Ферма.

Теорема 23.3 (*достаточное условие локального экстремума*). *Пусть $f(x) \in \mathrm{C}(x_0)$ и $f(x)$ дифференцируема в некоторой $\mathrm{U}'(x_0)$. Тогда если $f'(x)$ меняет свой знак при переходе через точку x_0, то данная функция имеет в точке x_0 локальный экстремум. При этом если $f'(x) > 0$ при $x \in \mathrm{U}'(x_0 - 0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in \mathrm{U}'(x_0 + 0)$, то x_0 — локальный максимум, в противном случае — локальный минимум.*

Доказательство. Докажем часть утверждения, говорящую о локальном максимуме. Вторая часть доказывается аналогично. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. При $x \in \mathrm{U}'(x_0 - 0)$, $f'(\xi) > 0$, а $x - x_0 < 0$, т.е. $f(x) - f(x_0) < 0$. При $x \in \mathrm{U}'(x_0 + 0)$, $f'(\xi) < 0$, а $x - x_0 > 0$, т.е. $f(x) - f(x_0) < 0$. Значит, x_0 — локальный максимум. **[:|||||:]**

Обратное неверно! Например, рассмотрим функцию, имеющую экстремум в точке, около которой производная функции не имеет определенного знака:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Здесь $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \neq 0$, т.е. $x = 0$ — локальный минимум. Теперь возьмем производную:

$$f'(x) = 4x + 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Можно показать, что $f'(x)$ не имеет определенного знака ни в какой окрестности точки 0.

Теорема 23.4 (***достаточное условие локального экстремума в терминах производной высших порядков***)**.** *Пусть $f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда при $n = 2k$, $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 (минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$). Если же $n = 2k+1$, то x_0 — точка монотонности ($f(x)\uparrow$, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и $f(x)\downarrow$, если $f^{(n)}(x_0) < 0$).*

Доказательство. Напишем разложение $f(x)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. $f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \bar{o}((x-x_0)^n) \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \alpha(x)\cdot(x-x_0)^n = (x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right)$, где $\alpha(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, т.е. $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Приняв $\varepsilon = \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|$, получаем, что в некоторой окрестности x_0 знак $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)$ не зависит от $\alpha(x)$, а зависит только от $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. При $n = 2k$, $(x-x_0)^n \geqslant 0$. Получили то, что и требовалось доказать. При $n = 2k+1$, знак $(x-x_0)^n$ равен знаку $x - x_0$, а значит, при $f^{(n)}(x_0) > 0$ равен знаку $f(x) - f(x_0)$, а при $f^{(n)}(x_0) < 0$ не совпадает с ним, т.е. x_0 — точка монотонности. **[:|||||:]**

3 Асимптота графика функции

Пусть функция $f(x)$ определена на луче $(a, +\infty)$ ($(-\infty, a)$). Тогда если найдутся такие $k, b \in \mathbb{R}$, что выполнено $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx - b) = 0\right)$, то прямая $kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Теорема 23.5 (***единственность асимптоты***)**.** *Наклонная асимптота единственна.*

Доказательство. Пусть $kx + b$ — наклонная асимптота к $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$ доказательство аналогично приведенному). Тогда $f(x) - kx - b = \bar{o}(1) \Leftrightarrow f(x) = kx + b + \bar{o}(1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \bar{o}\left(\frac{1}{x}\right)$. Устремим в обоих частях $x \to +\infty$. Получаем, что $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Возвращаясь к предыдущему равенству, имеем $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$. Поскольку значения пределов единственные, то и асимптота тоже единственная. **[:|||||:]**

Доказав данную теорему, мы также научились вычислять наклонную асимптоту.

Пусть теперь $f(x)$ определена на некоторой $\mathrm{U}(x_0)$ или на $\mathrm{U}'(x_0)$. Тогда если равен $\pm\infty$ один из ее односторонних пределов в x_0, то прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика $f(x)$.

Например, рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x}$ в $x_0 = 0$. $\lim\limits_{x\to0+0} f(x) = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to0-0} f(x) = -\infty$. Значит, $x = 0$ — вертикальная асимптота.

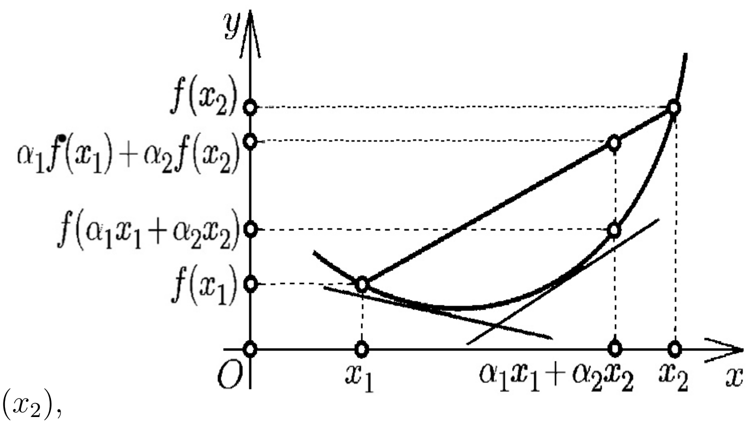
Часть 24

Исследование функций методами дифференциального исчисления II

1 Выпуклость функции и точки перегиба

Будем называть $f(x)$ **выпуклой вверх** на интервале (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ и $\forall \alpha_1, \alpha_2 > 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$. Соответственно, функция **выпукла вниз**, если в указанном неравенстве поставить $\leqslant$. В случаях, когда неравенство строгое, говорят о *строгой* выпуклости функции.

Преобразуем указанное неравенство следующим образом. Для начала решим следующую систему:



$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ \alpha_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

Тогда неравенство в определении можно записать в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

$$(x_2 - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2) \text{ домножим на } \frac{1}{(x_2 - x)(x - x_1)}.$$

$$\frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x_2 - x} \leqslant \frac{f(x_1)}{x - x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x},$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Теперь поочередно устремляя x к x_1 и x к x_2, получаем, что $f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ и $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$, т.е. $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$ для любых x_1, $x_2 \in (a, b)$, т.е. $f'(x) \nearrow$ на (a, b). Предположим теперь, что выпуклость строгая. Тогда по теореме Лагранжа $f'(x_1) \leqslant f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2) \leqslant f'(x_2)$, где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Значит, если характер выпуклости строгий, то монотонность производной также строгая.

В обратную сторону, если известно, что $f'(x) \uparrow$, то можно опять-таки записать по теореме Лагранжа $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$.

Тем самым, мы доказали следующую теорему:

Теорема 24.1 (*критерий выпуклости*). *Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b). Тогда $f(x)$ выпукла вниз т.и.т.т., когда $f'(x) \nearrow$ на (a, b). Причем строгое возрастание влечет строгую выпуклость.*

Следствие 24.2. *Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b). Тогда $f(x)$ выпукла вниз т.и.т.т., когда $f''(x) \geqslant 0$ на (a, b). Если же $f''(x) > 0$, то $f(x)$ строго выпукла вниз.*

2 Геометрическая интерпретация выпуклости

Для начала вспомним, что $y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной в точке x_0.

Теорема 24.3. *Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b), то для ее выпуклости вниз необходимо и достаточно, чтобы все точки ее графика лежали не ниже любой касательной в любой точке интервала (a, b). Если $f(x)$ строго выпукла вниз, то все точки графика (за исключением точки касания) лежат строго выше любой касательной.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  Пусть $f(x)$ выпукла вниз. Рассмотрим разность $f(x) - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа, $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где ξ лежит между x и x_0. Тогда получаем $f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0)$. Теперь если $x > x_0$, то и $\xi > x_0$, а, ввиду выпуклости вниз, $f'(\xi) - f'(x_0) > 0$. Если же $x < x_0$, то и $\xi < x_0$, а значит, $f'(\xi) - f'(x_0) < 0$. В любом случае, знак $f'(\xi) - f'(x_0)$ совпадает со знаком $x - x_0$, а значит, произведение неотрицательно, т.е. $f(x) - y_{\text{кас}} \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

- ***Достаточность.***

  Снова рассмотрим $f(x) - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant 0$. Тогда получаем, что

  $$\begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'(x_0), & \text{если } x > x_0 \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant f'(x_0), & \text{если } x < x_0 \end{cases} \Rightarrow \forall x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

  А это не что иное, как определение выпуклости.

[:|||||:]

Следует отметить, что не стоит использовать геометрическую интерпретацию в качестве определения выпуклости. Например, функция $f(x) = |x|$ выпукла вниз по определению, но у нее не существует касательной в точке $x_0 = 0$ (соответственно, использовать вышеприведенный критерий в качестве определения проблематично).

3 Точки перегиба

Пусть $f(x)$ дифференцируема на некоторой $\mathrm{U}(x_0)$. Тогда если в окрестностях $\mathrm{U}_-(x_0)$ и $\mathrm{U}_+(x_0)$ различные направления выпуклости, то точка x_0 называется **точкой перегиба**. Будем также требовать дифференцируемость функции в точке x_0.

Например, $f(x) = x^3$ имеет точку перегиба $x_0 = 0$.

Теорема 24.4 (*необходимое условие точки перегиба*). *Пусть функция $f(x)$ имеет точку перегиба в x_0, а $f''(x)$ непрерывна на некоторой $\mathrm{U}(x_0)$. Тогда $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f''(x_0) > 0$. Тогда $\exists \widetilde{\mathrm{U}}(x_0) : \forall x \in \widetilde{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow f''(x) > 0$. Это следует из локального свойства сохранения знака непрерывной в точке функции (см. теорему 13.3). Но полученное означает, что x_0 не является точкой перегиба, что противоречит условию. **[:|||||:]**

Теорема 24.5 (*достаточное условие точки перегиба*). *Пусть $f(x)$ дифференцируема на $\mathrm{U}(x_0)$ и дважды дифференцируема на $\mathrm{U}'(x_0)$. Тогда если $\nexists f''(x_0)$ или $f''(x_0) = 0$, и $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через x_0, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть, не теряя общности, $f''(x) > 0$ при $x \in \mathrm{U}'_-(x_0)$ и $f''(x) < 0$ при $x \in \mathrm{U}'_+(x_0)$. Этого достаточно для строгой монотонности $f'(x)$ в данных полуокрестностях, а значит, и для разного направления выпуклости. Тогда x_0 — точка перегиба по определению. **[:|||||:]**

Следствие 24.6. *Пусть $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 — точка перегиба.*

Часть 25

Функции нескольких переменных

1 n-мерное евклидово пространство

С этого момента мы будем работать с конечномерным пространством $\mathbb{R}^n$. И если раньше мы считали, что x — это точка на вещественной прямой, то теперь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, — точка в n-мерном пространстве. Более того, рассматривается *евклидово* пространство. Это значит, что определены понятия:

- **Норма** $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, для которой выполняются следующие свойства:
  1. $\forall x \Rightarrow \|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
  3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- **Расстояние между точками** $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, для которого верно следующее:
  1. $\rho(x, x) = 0$.
  2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
  3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \;\; \forall z \in \mathbb{R}^n$.

Подробнее евклидово пространство будет рассмотрено нами в курсе линейной алгебры (в том числе будут приведены доказательства некоторых вышеупомянутых свойств). Однако докажем следующие два свойства:

Теорема 25.1 (*Неравенство Коши-Буняковского*). *Для любых векторов x, y из евклидова пространства L выполняется неравенство*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

причем равенство достигается т.и.т.т., когда векторы x и y линейно зависимы.

Доказательство. Если $x = 0$ или $y = 0$, то $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| = 0$, а векторы x и y линейно зависимы. Пусть теперь $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Обозначим $a = \|x\|^2,\ b = \langle x, y\rangle,\ c = \|y\|^2$. Тогда $\forall t \in \mathbb{R}$ из условия положительной определенности скалярного произведения

$$\langle tx + y, tx + y\rangle = t^2\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = at^2 + 2bt + c \geqslant 0.$$

Здесь $a > 0$, поэтому последнее неравенство выполняется для всех t только при неположительном дискриминанте, т.е.

$$D = 4b^2 - 4ac \leqslant 0,$$
$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2,$$
$$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Равенство $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ выполняется только в случае $\langle tx + y, tx + y\rangle = 0$, т.е. $tx + y = 0$, а это и означает, что x и y линейно зависимы. **[:|||||:]**

Теорема 25.2 (*Неравенство Минковского*). *Для любых двух векторов* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *и* $b = (b_1, \ldots, b_n)$ *имеет место неравенство*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Доказательство. По формуле квадрата суммы и в силу неравенства Коши-Буняковского:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Правая часть этого неравенства может быть записана в виде квадрата суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Таким образом

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2,$$
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

[:|||||:]

2 Определения

2.1 Классификация точек

Будем называть ***открытым шаром*** радиуса ε с центром в точке a множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) < \varepsilon\}$, а ***закрытым шаром*** радиуса ε с центром в точке a множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) \leqslant \varepsilon\}$. ***Сферой*** же радиуса ε с центром в a будем называть множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) = \varepsilon\}$. Принято обозначать открытый шар радиуса ε с центром в a как $\mathrm{U}_\varepsilon(a)$. Подробнее о связи с окрестностью точки будет сказано ниже.

Например, в двумерном случае открытый шар — это множество всех точек круга радиуса ε (не считая границу), закрытый — сам круг радиуса ε, а сфера — это окружность радиуса ε.

Пусть имеется множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда все точки пространства можно разделить на 3 непересекающихся множества:

- x **внутренняя** для M, если $\exists \varepsilon > 0 : \mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset M$. Фактически это означает, что существует такой открытый шар вокруг x, который целиком содержится в M.

- x **внешняя** для M, если $\exists \varepsilon > 0 : \mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap M = \varnothing$. Это означает, что существует такой открытый шар вокруг x, который не содержится в M.

- x **граничная**, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x', x'' \in \mathrm{U}_\varepsilon(x) : x' \in M,\, x'' \notin M$. Заметим, что граничная точка не является ни внутренней, ни внешней. Иначе говоря, часть точек из открытого шара вокруг x принадлежит M, а часть — нет.

2.2 Открытые и замкнутые множества

Будем называть множество M **открытым**, если оно состоит только из внутренних точек. Множество M называется **замкнутым**, если оно содержит также все свои граничные точки. **Границей** множества ∂M будем называть множество всех граничных точек M.

Из определений ясно, что если M — открытый шар, то $\partial M \not\subset M$, а если замкнутый, то $\partial M \subset M$. Однако стоит понимать, что множество может быть не открытым и не замкнутым, например:

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{cases} \rho(x,a) < \varepsilon, & \text{если } x_1 \text{ — рационально} \\ \rho(x,a) \leqslant \varepsilon, & \text{если } x_1 \text{ — иррационально} \end{cases} \right\}.$$

Очевидно, что в этом множестве есть граничные точки, но не все.

Важно также понимать, что граница множества — необязательно подмножество самого множества. Рассмотрим следующий пример:

$$M = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \text{где } x, y \text{ — рациональные}\}.$$

Нетрудно понять, что $\partial M = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, т.е. $M \subset \partial M$. Более того, из определений этих множеств следует, что $|M| = \aleph_0$, в то время как $|\partial M| = |\mathbb{R}|$, т.е. $|M| < |\partial M|$.

Будем называть точку x **предельной** для M, если $\forall \varepsilon > 0$ в $\mathrm{U}_\varepsilon(x)$ есть точки из M, отличные от x. Из этого определения следует, что x — предельная точка т.и.т.т., когда $\forall \varepsilon > 0$ в $\mathrm{U}_\varepsilon(x)$ содержится бесконечно много точек из M (тут все аналогично одномерному случаю).

Теорема 25.3. *Множество M замкнуто т.и.т.т., когда M содержит все свои предельные точки.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  M, будучи замкнутым, не содержит в себе только внешние точки. Но предельные точки по определению не являются внешними, значит они заведомо входят в M.

- ***Достаточность.***

  Предположим, что M не замкнуто и $\exists x^*$ — граничная точка, такая что $x^* \notin M$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ в $\mathrm{U}_\varepsilon(x^*)$ есть точки из M, отличные от x^* (т.к. $x^* \notin M$ по предположению). Но это не что иное, как определение предельной точки, т.е. x^* — предельная точка. Но тогда по 1 части теоремы $x^* \in M$, т.е. получили противоречие.

[:||||:]

Предельная и граничная точка — разные понятия! Например, рассмотрим множество $M = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(2,2)\}$. Тогда:

- Точка $(0,0)$ является предельной, но не граничной.
- Точка $(1,0)$ и граничная, и предельная.
- Точка $(2,2)$ граничная (т.к. в любом открытом шаре вокруг нее есть она сама и точки не из M), но не предельная.

2.3 Окрестность точки

Теперь поговорим об окрестностях. В многомерном пространстве можно определить 2 вида взаимозаменяемых (как будет показано позже) окрестностей. Обычно в доказательствах принято использовать шаровую окрестность $\mathrm{U}_\varepsilon(x)$ (т.е. открытый шар), но возможен и другой вариант.

Назовем **прямоугольной окрестностью** точки a окрестность $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, состоящую из всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, таких что $|x_1 - a_1| < \varepsilon_1,\ |x_2 - a_2| < \varepsilon_2, \ldots, |x_n - a_n| < \varepsilon_n$. Эта окрестность так называется, потому что фактически является параллелепипедом в n-мерном пространстве со сторонами $(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_n)$. Однако вид окрестности не имеет значения (в одномерном случае они вообще одинаковы):

Теорема 25.4. *Любая шаровая ε-окрестность точки a содержит в себе некоторую прямоугольную окрестность, и наоборот, любая прямоугольная окрестность точки a содержит в себе некоторую шаровую ε-окрестность.*

Доказательство.

- Пусть имеется ε-окрестность точки a. Тогда по определению $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} < \varepsilon$, из чего следует, что $\forall i \in \overline{1,n} \Rightarrow |x_i - a_i| < \varepsilon$, а это значит, что x принадлежит прямоугольной ε-окрестности.

- Пусть теперь $x \in (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$. Тогда $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} < |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| + \cdots + |x_n - a_n| < \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n \leqslant n \cdot \max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\} = \varepsilon$, т.е. $x \in \mathrm{U}_\varepsilon(a)$.

[:||||:]

Будем называть множество M **ограниченным**, если $\exists c > 0 : \forall x \in M \Rightarrow |x| \leqslant c$. Здесь запись $|x|$ фактически означает $\|x\|$. Далее мы везде будем использовать $|x|$, если из контекста понятно, что имеется в виду. Это удобно, поскольку многие определения и теоремы в многомерном случае формулируются точно так же, как и в одномерном, если не учитывать смысл, который вкладывается в запись $|x|$.

Будем говорить, что точки a и b **связаны непрерывной кривой** $L(t)$, если $\exists \varphi_i(t) \in \mathrm{C}[\alpha, \beta] : \varphi_i(\alpha) = a_i,\ \varphi_i(\beta) = b_i$. Иными словами, есть некоторая непрерывная кривая, каждая точка $L(t)$ которой задается как $L(t) = (\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2), \ldots, \varphi_n(t_n))$, причем первая точка кривой совпадает с a, а последняя — с b, т.е. она соединяет точки a и b, причем ее траектория может быть абсолютно любой.

Соответственно, множество M называется **связным**, если $\forall x', x'' \in M\ \exists L(t)$, соединяющая x' и x'', причем $L(t) \subset M$. Например, множество $M = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ связно, а $M' = M \cup \{(x,y) \mid (x-3)^2 + (y-3)^2 \leqslant 1\}$ — нет, т.к. не существует кривой, целиком содержащейся в M', которая бы соединяла, например, $x' = (0,0)$ и $x'' = (3,3)$.

3 Числовые последовательности в $\mathbb{R}^m$

Как и в одномерном случае, у нас есть некоторое отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}^m$, т.е. каждому $n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n) \in \mathbb{R}^m$. Обратите внимание, что n означает не возведение в степень, а n-ый член последовательности.

Теперь введем понятие *сходимости* в многомерном пространстве:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geqslant N \Rightarrow |x^n - a| < \varepsilon.$$

Заметим, что это определение абсолютно аналогично таковому в одномерном случае за исключением смысла $|x^n - a|$ (теперь это $\rho(x^n, a)$).

Теорема 25.5. *Для любого **конечномерного** пространства $\mathbb{R}^m$ выполняется: $\{x^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Leftrightarrow \forall i \Rightarrow \{x_i^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_i$.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  По определению $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geqslant N \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i^n - a_i)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |x_i^n - a_i| < \varepsilon\ \ \forall i$, а это означает, что $\{x_i^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_i$.

- ***Достаточность.***

  По определению $\forall i$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_i(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_i \Rightarrow |x_i^n - a_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Но если выбрать $N = \max\{N_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, то $\forall n \geqslant N \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - a_i)^2 < m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m} = \varepsilon^2 \Leftrightarrow \rho(x^n, a) < \varepsilon$.

[:|||||:]

Таким образом, все теоремы доказываются, опираясь на уже доказанное для одномерного случая. Например:

Теорема 25.6 (*Критерий Коши*). *Последовательность $\{x^n\}$ сходится т.и.т.т., когда она является фундаментальной, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x^{n+p} - x^n| < \varepsilon$.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  Полностью аналогично одномерному случаю.

- ***Достаточность.***

  $\exists x^n$ — фундаментальная. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i^{n+p} - x_i^n)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall i\ \ |x_i^{n+p} - x_i^n| < \varepsilon$, а это определение фундаментальной последовательности для одномерного случая. Каждая координатная последовательность сходится, значит из предыдущей теоремы следует, что и $\{x^n\}$ сходится.

[:|||||:]

Теорема 25.7 (*Теорема Больцано-Вейерштрасса*). *Если $\{x^n\}$ ограничена, то существует ее сходящаяся подпоследовательность, т.е. $\exists \{x^{k_n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.*

Доказательство. Если $\{x^n\}$ ограничена, то и все ее координатные последовательности также ограничены. $\{x_1^n\}$ ограничена, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса для одномерного случая $\exists\{x_1^{q_n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_1$. Аналогично, $\{x_2^{q_n}\}$ ограничена $\Rightarrow \exists\{x_2^{w_{q_n}}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_2$. Продолжая так прореживать последовательность вплоть до m-ой координаты, получим, что каждая координатная подпоследовательность сходится к соответствующей координате числа a. А это и значит, что нашлась такая подпоследовательность $\{z_n\}$, что $\{x^{z_n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. **[:||||:]**

4 Предел функции

Будем рассматривать функцию $f\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$. Пусть теперь $f(x)$ определена на $\mathbb{E}$, а $x^{(0)}$ — предельная точка этого множества. Число A называется **пределом** функции f при $x \to x^{(0)}$ по множеству $\mathbb{E}$ (обозначается, как и раньше, $\lim\limits_{\mathbb{E}\ni x\to x^{(0)}} f(x) = A$), если

- $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{E},\ 0 < \rho(x, x^{(0)}) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ *(определение по Коши)*.
- $\forall\{x^{(m)}\} : x^{(m)} \in \mathbb{E} \setminus \{x^{(0)}\},\ x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x^{(0)} \Rightarrow \{f(x^{(m)})\} \to A$ *(определение по Гейне)*.

Как и в одномерном случае, можно убедиться, что оба определения эквивалентны. Запись $x^{(m)}$ означает в данном случае то же, что и x^m, т.е. m-ый член последовательности, и призвана подчеркнуть, что имеется в виду не возведение в степень.

Теорема 25.8 (*Критерий Коши существования предела функции*). *Для существования конечного предела $\lim\limits_{\mathbb{E}\ni x\to x^{(0)}} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \mathbb{E} \cap \mathrm{U}'_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Аналогично случаю одной переменной. **[:||||:]**

Если в определении предела функции f по множеству X в качестве множества X взято пересечение $\mathbb{E}$ с некоторой кривой Γ (проходящей через точку $x^{(0)}$), то такой предел называется пределом функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ **по кривой** Γ (а пересечение с лучом называется **пределом по направлению**).

Утверждение 25.9. *Если функция $f(x)$ имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке пределы по всем направлениям, значения которых совпадают с этим пределом, причем* ***обратное, вообще говоря, неверно!***

Например, рассмотрим функцию $f(x,y) = \frac{x^2y}{y^2+x^4}$. Несложно показать, что $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$ — достаточно предъявить последовательности $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ и $(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2})$. Но если взять предел по произвольной прямой, т.е. принять $x = \alpha t$, $y = \beta t$, то такой предел всегда существует.

5 Функции двух переменных

В основном мы будем заниматься исследованием функций двух переменных, поэтому удобно ввести некоторые обозначения и вспомогательные определения. Во-первых, точку в пространстве (в данном случае, на плоскости) будем обозначать привычной записью (x, y), а саму функцию как $f(x, y)$. Значение предела функции в точке (x_0, y_0) будем записывать как $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ или $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ и называть **двойным пределом**.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности точки (x_0, y_0). **Повторными пределами** функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) называют пределы

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right),\quad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Разумеется, оба этих предела могут быть неравны, из их существования не следует существование равного им двойного предела (и наоборот). Геометрическая интерпретация повторного предела такова. Предположим, что мы ищем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$. Тогда мы сначала движемся по некоторой прямой, параллельной Oy к Ox, а затем вдоль Ox приближаемся к началу координат.

6 Непрерывность

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x^{(0)}$ по множеству $\mathbb{E}$, если

$$\lim_{\mathbb{E}\ni x\to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}).$$

Как и в одномерном случае, будем считать, что если $x^{(0)}$ — изолированная точка множества $\mathbb{E}$, то $f(x)$ непрерывна в этой точке, а понятие предела в точке $x^{(0)}$ по $\mathbb{E}$ не определено.

Теорема 25.10 (*Непрерывность суперпозиции*). *Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ и каждая из m функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $\mathbb{E}$. Предположим также $y^{(0)} = g\left(f_1(x^{(0)}); \ldots; f_m(x^{(0)})\right)$ и функция g непрерывна в точке $y^{(0)}$ по множеству $\mathbb{F}$. Пусть ещё $(f_1(x); \ldots f_m(x)) \in \mathbb{F}$ для $\forall x \in \mathbb{E}$.*

Тогда сложная функция $h\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = g\left(f_1(x); \ldots f_m(x)\right)$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $\mathbb{E}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную сходящуюся к $x^{(0)}$ последовательность точек $N_n = (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)})$ множества $\mathbb{E}$. Обозначим через $\{M_n\}$ соответствующую последовательность точек пространства $\mathbb{R}^m$, координаты $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ которых равны

$$x_i^{(n)} = f_i(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)}).$$

Тогда из непрерывности функций f_i в точке $x^{(0)}$ и определения по Гейне следует сходимость последовательности точек $\{M_n\}$ к точке $y^{(0)}$. Из непрерывности функции g в точке $y^{(0)}$ и определения непрерывности по Гейне следует, что $\{g(M_n)\}$ сходится к $g(y^{(0)})$.

Но это и означает, что последовательность $g(f_1(N_n), f_2(N_n), \ldots, f_m(N_n))$ значений этой сложной функции сходится к значению этой сложной функции $g(f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))$, что и дает непрерывность функции $h(x)$ в точке $x^{(0)}$. **[:||||:]**

Часть 26
Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

1 Частные производные ФНП и ее дифференциал

Как уже упоминалось ранее, мы будем рассматривать функцию двух переменных, поскольку анализ такой функции не сильно отличается от анализа функции n переменных, однако существенно проще в обозначениях. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $\mathrm{U}(M_0)$, где $M_0 = (x_0, y_0)$. Если зафиксировать $y = y_0$, то $z = f(x, y_0)$ — функция одного переменного.

Производная функции одного переменного $f(x, y_0)$ в точке $x = x_0$ (которую мы привыкли записывать как $\frac{df(x_0,y_0)}{dx}$) называется **частной производной** $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ в точке M_0. Аналогично, можно зафиксировать $y = x_0$ и определить частную производную $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ как производную функции одного переменного $f(x_0, y)$ в точке $y = y_0$.

Символ ∂, в отличие от привычного d, используемого при анализе функции одного переменного, призван подчеркнуть, что рассматривается функция нескольких переменных. Заметим, что по определению $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$ иногда также обозначают как $f'_x(M_0)$.

Выберем такие Δx и Δy, что $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \mathrm{U}(M_0)$. Назовем **полным приращением** функции f в точке M_0 величину

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Как и раньше, будем называть функцию $f(x, y)$ **дифференцируемой** в точке M_0, если выполнено:

$$\Delta z = \underbrace{A\Delta x + B\Delta y}_{\text{полный дифференциал}} + \bar{o}(\rho) \text{ при } \rho \to 0, \text{ где } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Нетрудно заметить, что это определение практически не отличается от такового в одномерном случае. Функция дифференцируема в некоторой точке, если ее полное приращение в этой точке представимо в виде линейной функции. Как и раньше, обозначим $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Тогда $dz = A\Delta x + B\Delta y = Adx + Bdy$, причем A и B не зависят от Δx, Δy. Перепишем полное приращение в следующем виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \bar{o}(\rho) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho, \tag{1}$$

где α — бесконечно малая при $\rho \to 0$.

Лемма 26.1. *Определение приращения 1 эквивалентно следующему:*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2 \to 0. \tag{2}$$

Доказательство. Докажем, что $1 \Rightarrow 2$.

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = A\Delta x + B\Delta y + \frac{\Delta x^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\alpha + \frac{\Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\alpha =$$

$$= A\Delta x + B\Delta y + \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\alpha\Delta x + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\alpha\Delta y.$$

Пусть теперь $\alpha_1 = \frac{\Delta x \cdot \alpha}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$, а $\alpha_2 = \frac{\Delta y \cdot \alpha}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$. Заметим, что $\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \leqslant 1$ и $\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \leqslant 1$, т.е. $|\alpha_1| \leqslant |\alpha|$ и $|\alpha_2| \leqslant |\alpha|$. Но тогда по теореме о двух милиционерах α_1, α_2 — бесконечно малые при $\rho \to 0$.

Теперь докажем, что $2 \Rightarrow 1$.

$$\beta(\Delta x, \Delta y) = \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \alpha_1 \rho + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \alpha_2 \rho = \rho \left(\frac{\Delta x}{\rho} \alpha_1 + \frac{\Delta y}{\rho} \alpha_2 \right).$$

Пусть теперь $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x}{\rho}\alpha_1 + \frac{\Delta y}{\rho}\alpha_2$. Поскольку $\frac{\Delta x}{\rho} \leqslant 1$ и $\frac{\Delta y}{\rho} \leqslant 1$, то $|\alpha| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| \Rightarrow \alpha \to 0$. **[:|||||:]**

2 Необходимые условия дифференцируемости

Теорема 26.2 (***Необходимое условие дифференцируемости I***). *Если $f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0, то она непрерывна в ней.*

Доказательство.

$$|\Delta z| = |A\Delta x + B\Delta y + \bar{o}(\rho)| \leqslant \left\{ \begin{matrix} |\Delta x| \leqslant \rho \\ |\Delta y| \leqslant \rho \end{matrix} \right\} \leqslant (|A| + |B|)\rho + \alpha\rho.$$

$\rho \to 0$, то и $\Delta z \to 0$, а это и значит, что $z = f(x,y)$ непрерывна в точке M_0. **[:|||||:]**

Теорема 26.3 (***Необходимое условие дифференцируемости II***). *Если $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0, то $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$, причем $A = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$ и $B = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$.*

Доказательство. $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$. Если зафиксировать $x = x_0$, то $\Delta x = 0$, а $|\rho| = |\Delta y|$, т.е. при $\rho \to 0$, $\Delta y \to 0$. Исходя из всего этого, получаем

$$\Delta z = B\Delta y + \alpha_2 \Delta y \Leftrightarrow \frac{\Delta z}{\Delta y} = B + \alpha_2.$$

Но $\frac{\Delta z}{\Delta y} \to \frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ при $\Delta y \to 0$. Но тогда $\frac{\partial z}{\partial y} = B$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = A$. **[:|||||:]**

Обратное, вообще говоря, неверно! Рассмотрим следующий пример: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Т.е. у функции существуют обе частные производные, равные 0 в точке (0,0).

Как известно, $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \bar{o}(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, что, учитывая предыдущие выкладки, эквивалентно $\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|} = \bar{o}(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$. Если это верное равенство, то по определению $\bar{o}$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Тогда возьмем последовательность $\{t_k\}$, такую что $\{t_k\} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ и примем $\Delta x = t_k$, $\Delta y = t_k$. Получаем

$$\lim_{t_k \to 0} \sqrt{\frac{t_k^2}{t_k^2 + t_k^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

3 Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 26.4. *Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности $\mathrm{U}(M_0)$ и $\exists \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$,* ***непрерывные*** *в точке M_0. Тогда $f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0.*

Доказательство. Поскольку $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в M_0, то они определены в некоторой $\mathrm{U}(M_0)$. Будем считать, что $\Delta x, \Delta y$ такие, что $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in \mathrm{U}(M_0)$.

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)) + (f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0))$.

И в левой, и в правой скобке имеем функции, фактически зависящие от одного переменного. Тогда применим теорему Лагранжа (здесь $0 < \Theta_1, \Theta_2 < 1$):

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\Theta_2\Delta y)\cdot\Delta y.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна в точке M_0 по условию, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\right) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y).$$

Значит, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)$. Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\Theta_2\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$ при $\rho \to 0$. В итоге,

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot\Delta x + \alpha_1\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot\Delta y + \alpha_2\Delta y.$$

А это не что иное, как определение полного приращения 2. Значит, $f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0. **[:||||:]**

Часть 27

Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных

1 Дифференцируемость сложной функции

Теорема 27.1. *Пусть функции $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы в t_0, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Предположим, что $z = z(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Тогда $z(x(t),y(t))$ дифференцируема в t_0, причем*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Доказательство. $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы в t_0, значит они определены в некоторой окрестности $\mathrm{U}(t_0)$ и непрерывны в t_0. $z(x,y)$ дифференцируема в (x_0,y_0), значит $z(x,y)$ определена в некоторой окрестности $\mathrm{U}(x_0,y_0)$. Тогда существует сложная функция $z(x(t),y(t))$ в $\mathrm{U}(t_0)$. Вспомним, что

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\rho,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \alpha(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{1}$$

$x(t)$, $y(t)$ непрерывны в $t_0 \Rightarrow \Delta x \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$, $\Delta y \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$, из чего следует, что $\rho \to 0 \Rightarrow \alpha \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$.

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} < \infty.$$

Последний переход справедлив, т.к. $x(t)$ и $y(t)$ определены в окрестности t_0. Тогда, перейдя к пределу в (1) при $\Delta t \to 0$, получаем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

[:||||:]

Несмотря на то, что мы доказали эту теорему для случая 2-ух переменных, она таким же образом формулируется и доказывается для случая многих переменных. Мы предполагаем, что $z = z(y_1, \ldots, y_m)$, $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $\forall i = \overline{1, n}$ справедливо:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

2 Инвариантность формы первого дифференциала и правила дифференцирования

Пусть выполняются все условия теоремы 27.1. Тогда если x и y — независимые переменные, то, как мы уже знаем, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Пусть теперь x и y в свою очередь зависят от t. По определению дифференциала $dz = \frac{dz}{dt} \cdot dt$. В данном случае $\frac{dz}{dt}$ — это отдельный символ, поэтому, разумеется, нельзя сокращать dt! Воспользуемся теперь результатами предыдущей теоремы:

$$dz = \frac{dz}{dt}dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right) dt = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \boxed{\frac{dx}{dt} \cdot dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \boxed{\frac{dy}{dt} \cdot dt} = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Части, выделенные рамкой, по определению равны dx и dy. Как видно, получили то же самое, что и в случае, когда x и y независимы. Аналогично случаю одного переменного, это свойство для функций нескольких переменных называется **инвариантностью формы первого дифференциала**. Из этой же аналогии очевидно, что инвариантность формы дифференциала второго и высших порядков не выполняется.

Инвариантность формы первого дифференциала позволяет доказать следующие ***правила дифференцирования***:

1. Если $c = const$, то $d(cu) = cdu$.
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
3. $d(uv) = udv + vdu$.
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Доказательство.

1. $\exists \omega = \omega(u) = cu$. Тогда $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u}du = cdu$.
2. $\exists \omega = \omega(u, v) = u \pm v$. Снова $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u}du \pm \frac{\partial \omega}{\partial v}dv = du \pm dv$.

3. $\exists \omega = \omega(u, v) = u \cdot v$. Тогда $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u} du + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv = vdu + udv$.

4. $\exists \omega = \omega(u, v) = \frac{u}{v}$. Аналогично, $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u} du + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Заметим, что в силу инвариантности формы первого дифференциала все эти формулы справедливы и в случае, когда u, v зависят от каких-либо переменных. **[:|||||:]**

Часть 28

Частные производные и дифференциалы высших порядков

1 Смешанные производные

Пусть $z(\bar{x})$ имеет производную $\frac{\partial z}{\partial x_i}(\bar{x})$, дифференцируя которую по x_j, получим $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$. Введем теперь некоторые определения и обозначения.

- Если $i \neq j$, то частная производная $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$ называется **смешанной производной** функции z по переменным x_i и x_j. Обозначать смешанную производную принято так:

  $$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \text{ или } z''_{x_i x_j}.$$

  Будем использовать такой порядок переменных в этом обозначении, в каком производится взятие производных.

- Если $i = j$, то производная $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$ называется **второй частной производной** функции z по x_i. Обозначение такое же:

  $$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} \text{ или } z''_{x_i x_i}.$$

Вообще говоря, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$. В качестве примера рассмотрим функцию

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Сначала найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x^4 + 3x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

По определению производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{z(x, 0) - z(0, 0)}{x} = 0 = \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0).$$

Теперь снова по определению посчитаем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{z'_x(0,y) - z'_x(0,0)}{y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{z'_y(x,0) - z'_y(0,0)}{x} = 1.$$

Получили разные результаты. Заметим, что ***следующее рассуждение неверно!***

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3(x^2+y^2) - x^3 y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$
$$= \frac{(5x^4 - 3x^2y^2)(x^2+y^2)^2 - (x^5 - x^3y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}.$$

И в другом порядке:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2y(x^2+y^2) - x^3 y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$
$$= \frac{(x^4 + 9x^2y^2)(x^2+y^2)^2 - (x^4y + 3x^2y^3)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}.$$

Это неверно, т.к. предоставленные выражения справедливы только при $x^2 + y^2 > 0$, что в нашем случае не так, поэтому данные производные необходимо вычислять по определению!

2 Теорема о совпадении смешанных производных для функций n переменных

Теорема 28.1 (*Теорема Шварца*). *Если функция $z(\bar{x})$ имеет в точке $x^{(0)}$ непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)})$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)})$, то данные производные равны.*

Доказательство. Определим оператор

$$\Delta_{x_i}(z(\bar{x})) = z(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \ldots, x_n^{(0)}) - z(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Очевидно, что этот оператор линеен. Аналогичным образом зададим оператор $\Delta_{x_j}(z(\bar{x}))$. Для удобства опустим индекс $^{(0)}$:

$$\Delta_{x_j}(\Delta_{x_i}(z(\bar{x}))) = \Delta_{x_j}(z(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - z(x_1, \ldots, x_n)) =$$
$$= z(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots, x_n) - z(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) -$$
$$- z(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots, x_n) + z(x_1, \ldots, x_n).$$

Теперь, поменяв местами 2 и 3 слагаемое, получаем $\Delta_{x_i}(\Delta_{x_j}(z(\bar{x})))$, т.е. $\Delta_{x_j}(\Delta_{x_i}(z(\bar{x}))) = \Delta_{x_i}(\Delta_{x_j}(z(\bar{x})))$.

Применяя теорему Лагранжа по переменным x_i и x_j соответственно,

$$\Delta_{x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_i + \Theta_1 \Delta x_i, \ldots, x_n)\Delta x_i\right) = \Delta_{x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_j + \Theta_2 \Delta x_j, \ldots, x_n)\Delta x_j\right),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_i + \Theta_1 \Delta x_i, \ldots, x_j + \Theta_3 \Delta x_j, \ldots, x_n)\Delta x_i \Delta x_j =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_i + \Theta_4 \Delta x_i, \ldots, x_j + \Theta_2 \Delta x_j, \ldots, x_n)\Delta x_i \Delta x_j. \quad (1)$$

Переход ко второму равенству также сделан по теореме Лагранжа. Помним, что $0 < \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4 < 1$. Теперь сокращаем (1) на $\Delta x_i \Delta x_j$ и переходим к пределу при $\Delta x_i \to 0$, $\Delta x_j \to 0$. Используя непрерывность производных, получаем требуемое. **[:|||||:]**

Теорема 28.2 (***Обобщение теоремы Шварца***)**.** *Пусть $u(\bar{x})$ имеет в точке M_0 непрерывные частные производные m-ого порядка, а в некоторой окрестности точки M_0 непрерывны все ее производные низших порядков. Тогда частные производные m-ого порядка, отличающиеся исключительно порядком дифференцирования, совпадают в данной точке.*

Доказательство. Из необходимых условий дифференцирования следует, что все частные производные $(m-1)$-ого порядка функции $u(\bar{x})$ являются непрерывными. Используя метод математической индукции, можно доказать, что все производные функции u до порядка m включительно непрерывны.

Теперь достаточно доказать, что

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_m}}.$$

Для этого рассмотрим функцию $\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}}$. Для нее выполнены все условия теоремы Шварца, значит

$$\frac{\partial^{k+1} u(M_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} u(M_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}.$$

Теперь осталось лишь продифференцировать полученное $m-k-1$ раз, после чего и получим доказываемое. **[:|||||:]**

3 Второй дифференциал ФНП

Будем рассматривать функцию $f(\bar{x})\colon \mathrm{U}_\delta(M_0) \mapsto \mathbb{R}$ (от m переменных).

Первым полным дифференциалом данной функции в точке M_0 называется выражение:

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_m} dx_m.$$

Если $df(\bar{x})$ в свою очередь тоже дифференцируема, то можно рассмотреть дифференциал

$$\delta(df(\bar{x})) = \sum_{i=1}^{m} \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \delta x_k dx_i\right).$$

Заметим, что используемое обозначение δ призвано подчеркнуть, что дифференциал задается приращениями по каждой переменной, поэтому следует использовать именно его. Однако если $\delta x_i = dx_i$ (а мы чаще всего и имеем дело со случаем, когда все переменные независимы, и поэтому $dx_i = const$), то $\delta(df)$ обозначается как $d^2 f$, т.е.

$$d^2 f = \delta(df)|_{\delta x_i = dx_i} = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k.$$

Эту формулу удобнее записывать, введя *формальный символ*:

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m,$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 f.$$

Тем самым мы ввели понятие **второго полного дифференциала**. Обобщим полученный результат. Рассмотрим вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_m!$ и

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Тогда **полный дифференциал n-ого порядка** определяется как

$$d^n f = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} D^\alpha f(\bar{x}) dx^\alpha, \text{ где } dx^\alpha = dx_1^{\alpha_1} \ldots dx_m^{\alpha_m}.$$

Например, в частном случае для функции двух переменных при $n = 2$ имеем:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Теперь предположим, что аргументы функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ в свою очередь являются два раза дифференцируемыми функциями некоторых независимых переменных $t_1, \ldots, t_k$. Тогда:

$$d^2 f = \delta(df)\bigg|_{\delta x_i = dx_i} = \sum_{k=1}^{m} \left\{ dx_k \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_k} \delta(dx_k) \right\}\bigg|_{\delta x_i = dx_i} =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \left\{ dx_k \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \delta x_i \right\}\bigg|_{\delta x_i = dx_i} + \sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k} \delta(dx_k) \right\}\bigg|_{\delta x_i = dx_i}.$$

По определению второго дифференциала функции x_k выполняется

$$\delta(dx_k)\bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \delta x_2 = dx_2 \\ \ldots \\ \delta x_m = dx_m}} = d^2 x_k.$$

Учитывая это, формула второго дифференциала приобретает вид:

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k.$$

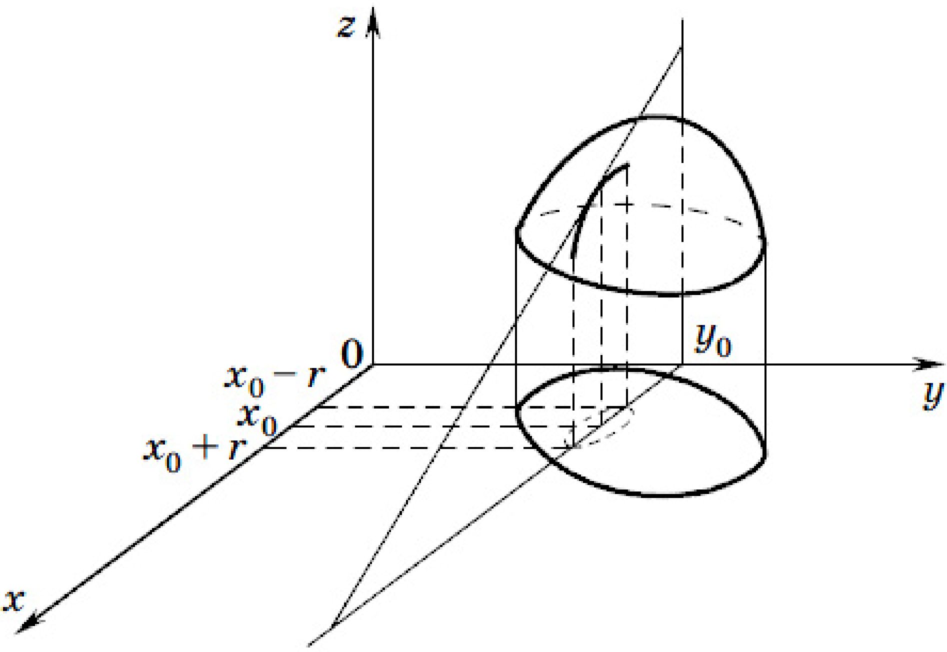
Часть 29

Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала

1 Частная производная первого порядка

Теперь будем рассматривать функцию $f(x, y)\colon \mathrm{U}_\delta(x_0, y_0) \mapsto \mathbb{R}$. Множество $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathrm{U}_\delta(x_0, y_0),\ z = f(x, y)\}$ — **график** функции $z = f(x, y)$ в $\mathbb{R}^3$.

По определению $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \frac{df(x_0, y)}{dy}\Big|_{y=y_0}$. ***Геометрическая интерпретация*** частной производной по y состоит в том, что значение этой производной в точке M_0 — угловой коэффициент наклона касательной в точке M_0, т.е. угол между касательной и ее проекцией на Oy. Аналогичный смысл несет в себе и частная производная по остальным переменным. На рисунке ниже продемонстрирован геометрический смысл частной производной по переменной x в точке (x_0, y_0).



2 Касательная плоскость

Вспомним, что $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0 т.и.т.т., когда $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \bar{o}(\rho)$, т.е.

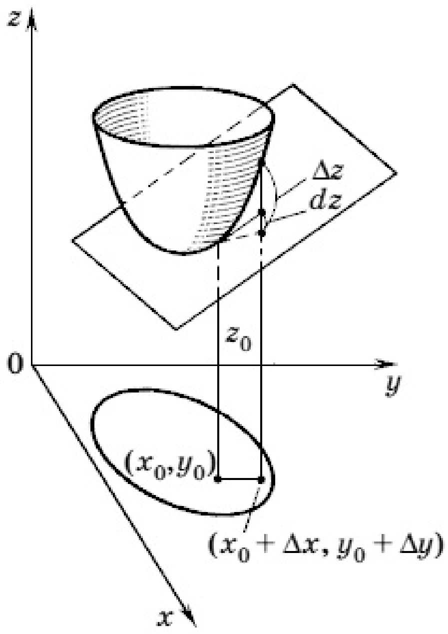
$$z = \underbrace{z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)}_{\text{касательная плоскость}} + \bar{o}(\rho).$$

Касательной плоскостью к графику функции $f(x, y)$ называется плоскость, разность аппликаты которой с $f(x, y)$ представляет из себя бесконечно малую величину более высокого порядка, чем ρ при $\rho \to 0$.

Как мы знаем, $\Delta z = z(x, y) - z_0 = A\Delta x + B\Delta y + \bar{o}(\rho)$. Тогда по данному определению выполняется, что $|z - z_0| = \bar{o}(\rho),\ \rho \to 0$.

Единственность касательной плоскости следует из единственности определения $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \bar{o}(\rho)$ и единственности частных производных (что следует из единственности предела). Мы можем записать

$$z - z_0 = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y - y_0) = dz,$$
$$z - z_0 = dz.$$



Таким образом, геометрический смысл полного дифференциала функции в точке (x_0, y_0) состоит в том, что он равен приращению аппликаты плоскости, касательной к графику функции (рис.).

Более подробно дифференциал

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta y,$$

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0,$$

совпадает с приращением в точке $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ аппликаты плоскости, касательной к графику функции в точке

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

3 Производная по направлению

Зафиксируем некоторую точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и будем работать с функцией $f(x, y, z)$: $\mathrm{U}_0(x_0, y_0, z_0) \mapsto \mathbb{R}$. Проведем из точки M_0 вектор $\bar{e}$, на котором на расстоянии t от M_0 отметим точку $M(x, y, z)$, причем вектор $\bar{e}$ зададим как $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы, которые составляет вектор $\bar{e}$ с осями координат. Данные косинусы углов принято называть **направляющими косинусами**.

Заметим, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Действительно, пусть вектор $\bar{e} = (e_1, e_2, e_3)$. Тогда по определению косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{e_3}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}}.$$

Из чего получаем, что вектор $\bar{e}$ — единичный. Рассмотрим теперь вектор $\overline{M_0M}$. Имеем:

$$\overline{M_0M} = (t\cos\alpha, t\cos\beta, t\cos\gamma),$$
$$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Таким образом, $x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\cos\beta,\ z = z_0 + t\cos\gamma \Rightarrow M = M_0 + t\bar{e}$. Иными словами, $f(x, y, z) = f(x(t), y(t), z(t))$ — сложная функция переменной t.

Производной функции $f(M_0 + t\bar{e})$ **по направлению** $\bar{e}$ называется

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \lim_{t\to 0}\frac{f(M_0 + t\bar{e}) - f(M_0)}{t}.$$

Используя то, что функция f дифференцируема в точке M_0, по правилу дифференцирования сложной функции получаем, что:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(M_0) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\cos\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{\cos\beta} + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{\cos\gamma}.$$

4 Градиент

Введём в рассмотрение вектор $\operatorname{grad} f(M_0) = \nabla f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0); \frac{\partial f}{\partial y}(M_0); \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)$, который называется **градиентом** функции f в точке M_0. Тогда, используя скалярное произведение, можно записать, что

$$\frac{\partial f}{\partial e} = (\operatorname{grad} f; \bar{e}).$$

Иными словами, производная функции f по направлению вектора $\bar{e}$ совпадает с проекцией $\operatorname{grad} f$ на это направление.

Обозначим через φ угол между векторами $\operatorname{grad} f$ и $\bar{e}$ и рассмотрим следующее неравенство:

$$\frac{\partial f}{\partial e} = |\operatorname{grad} f| \cdot |\bar{e}| \cdot \cos\varphi \leqslant |\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Если вектор $\operatorname{grad} f$ ненулевой, то существует единственное направление $\bar{e}$, производная по которому $\frac{\partial f}{\partial e} = |\operatorname{grad} f|$. Это направление: $\bar{e} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$, т.е. единичное направление градиента.

Отсюда вытекает ***геометрическая характеристика градиента*** — это вектор, по направлению которого производная имеет максимальное значение. На этом основании можно ***условно*** сказать, что направление градиента — это направление быстрейшего роста функции.

Часть 30
Неявные функции

1 Понятие неявной функции

Во многих ситуациях приходится сталкиваться с ситуацией, когда переменная u, являющаяся по смыслу функцией аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, задается посредством функционального уравнения $F(u, x_1, \ldots, x_n) = 0$. В этом случае говорят, что u как функция аргументов $x_1, \ldots, x_n$ задана ***неявно***. Возникает вопрос, при каких условиях уравнение $F(u, x_1, \ldots, x_n)$ однозначно разрешимо относительно u, т.е. однозначно определяет явную функцию $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, а также при каких условиях эта явная функция непрерывна и дифференцируема.

Рассмотрим функциональное уравнение $F(x, y) = y^2 + x^2 - 1 = 0$. Рассмотрим некоторую малую окрестность точки (x_0, y_0), где $y_0 > 0$. Тогда для всех точек из этой окрестности явная функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ тождественна заданному функциональному уравнению, т.к. при подстановке обращает его в тождество. Аналогично, получаем, что если $y_0 < 0$, то $y = -\sqrt{1 - x^2}$. А теперь возьмем точку $(1, 0)$. Для нее не существует окрестности, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ было бы тождественно какому-нибудь уравнению вида $y = y(x)$.

Функция $y = y(x)$ называется **неявной функцией**, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$, если при подстановке этой функции в данное уравнение оно обращается в верное тождество.

2 Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции

В данной теореме мы будем пользоваться прямоугольными δ, ε-окрестностями, которые были описаны ранее.

Теорема 30.1. *Пусть $F(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой $\mathrm{U}(x_0, y_0)$.*

2. *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ и $F'_y(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0).*

3. *$F(x_0, y_0) = 0$.*

*Тогда найдется $\mathrm{U}_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, в которой существует **непрерывная** функция $y = y(x)$, которая при подстановке в $F(x, y) = 0$ обращает его в тождество, т.е. $F(x, y(x)) = 0$ для всех $x \in \mathrm{U}_\delta(x_0)$. Если же вдобавок выполнено:*

4. *$F(x, y)$ дифференцируема в $\mathrm{U}_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$,*

то функция $y = y(x)$ дифференцируема в $\mathrm{U}_\delta(x_0)$, причем

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Из чего следует, что если F'_x и F'_y непрерывны, то и $y'(x)$ непрерывна.

Доказательство. Поскольку $F'_y(x_0, y_0)$ непрерывна, то в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) она имеет один знак. Например, предположим без потери общности, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Пусть $\exists \mathrm{U}_{\gamma,\varepsilon}(x_0, y_0)$, в которой функция $F(x, y)$ непрерывна и $F'_y(x, y) > 0$. Зафиксируем $\widetilde{x} \in (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$. Тогда $F(x, y)$ — функция от y. Тогда, ввиду того, что $F'_y(x, y) > 0$, выполняется $F(\widetilde{x}, y) \uparrow$. Значит, это же условие выполняется и для x_0, а, поскольку $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ и $F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$.

Из непрерывности функции $F(x, y)$ следует, что $\exists \mathrm{U}_\delta(x_0)$, в которой $\forall x \in \mathrm{U}_\delta(x_0) \Rightarrow F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$ и $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$. Зафиксируем $x^* \in \mathrm{U}_\delta(x_0)$. $F(x^*, y_0 - \varepsilon) < 0$ и $F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0$, тогда по теореме о прохождении непрерывной функции через все промежуточные значения $\exists y^* \in \mathrm{U}_\varepsilon(y_0) : F(x^*, y^*) = 0$. Из монотонности функции $F(x^*, y)$ мы можем каждому x^* поставить в соответствие ***единственное*** $y^* = y(x^*)$, такое, что $F(x^*, y^*) = 0$. Таким образом, доказано существование искомой функции $y = y(x)$.

Заметим, что мы для каждого ε предъявляем некоторое δ, такое, что для каждого $x^* \in \mathrm{U}_\delta(x_0)$ предъявляется соответствующее $y^* \in \mathrm{U}_\varepsilon(y_0)$. Иными словами, $y = y(x)\colon \mathrm{U}_\delta(x_0) \mapsto \mathrm{U}_\varepsilon(y_0)$. А это означает, что $y = y(x)$ непрерывна в точке x_0. Теперь докажем ее непрерывность в точке x^* из δ-окрестности x_0.

Рассмотрим точку (x^*, y^*). Для этой точки выполняются все условия доказываемой теоремы, т.к. $(x^*, y^*) \in \mathrm{U}_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Следует отметить, что найденная в процессе доказательства функция $y = y(x)$ ***единственна*** в окрестности x_0, а значит, та же функция используется и при работе с точкой x^*. Значит, $y = y(x)$ непрерывна и в точке x^*.

Пусть теперь $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой $\mathrm{U}(x_0, y_0)$. Вспомним, что

$$\begin{aligned}\Delta F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \\ = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.\end{aligned}$$

Здесь стоит отметить, что мы хотим найти именно $y'(x)$, т.е. $x_0 + \Delta x = x^*$, $y_0 + \Delta y = y^*$. А y^* выбрана таким образом, что $F(x^*, y^*) = 0$. Пусть $x_0 + \Delta x \in \mathrm{U}_\delta(x_0)$, $y_0 + \Delta y \in \mathrm{U}_\varepsilon(y_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1}{F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2}.$$

Устремляя Δx к 0, получаем:

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

[:||||:]

3 Теорема о разрешимости системы неявных функций

Теперь рассмотрим более общую задачу о возможности разрешить систему из m уравнений относительно m переменных.

Для системы m функций $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ переменных $t = (t_1, \ldots, t_m)$ определитель

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_m)}{\partial(t_1, \ldots, t_m)}(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_1}{\partial t_2}(t) & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial t_m}(t) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_2}{\partial t_2}(t) & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial t_m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_m}{\partial t_2}(t) & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial t_m}(t) \end{vmatrix} = J$$

называется **якобианом**.

Теорема 30.2. *Пусть*

1. *Функции $F_j(\bar{x}, \bar{y}) = F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $j = \overline{1, m}$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\mathrm{U}(x^{(0)}, y^{(0)})$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$.*

2. *$\forall j = \overline{1, m} \Rightarrow F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$.*

3. *$J = \left.\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0$.*

Тогда существует прямоугольная окрестность $Q_\delta(x^{(0)}) \times Q_\varepsilon(y^{(0)})$, в которой

$$\{F_j(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}_{j=1}^m \Leftrightarrow \{y_j = f_j(\bar{x})\}_{j=1}^m,$$

где $(f_1, \ldots, f_m) : Q_\delta(x^{(0)}) \mapsto Q_\varepsilon(y^{(0)})$, функции f_j непрерывно дифференцируемы на $Q_\delta(x^{(0)})$ и $\forall j = \overline{1, m} \Rightarrow f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$.

Часть 31
Безусловный экстремум функции нескольких переменных I

Пусть функция $f(\bar{x})$ определена в окрестности $\widetilde{\mathrm{U}}(x^{(0)}) \subset \mathbb{R}^n$. В дальнейшем под x мы будем подразумевать n-мерный вектор, поэтому вместо $\bar{x}$ будем писать просто x.

Точка $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists \mathrm{U}(x^{(0)})$: $\forall x \in \mathrm{U}'(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \geqslant f(x^{(0)})$. Если знак $\geqslant$ заменить на $>$, то получаем определение **строгого локального минимума**. Аналогично вводится понятие **локального максимума (строгого локального максимума)**. Тогда **локальный экстремум** — это либо локальный максимум, либо локальный минимум.

Теорема 31.1 (***Необходимое условие локального экстремума***). *Пусть $x^{(0)}$ — локальный экстремум, и существует частная производная $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$. Тогда $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x_i^{(0)}) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, т.е. зафиксируем все координаты, кроме i-ой. По теореме Ферма $\varphi'(x_i^{(0)}) = 0$. Но $\varphi'(x_i^{(0)}) = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$. **[:||||:]**

Будем называть точку $x^{(0)}$ **стационарной точкой** функции f, если f дифференцируема в $x^{(0)}$, и $df(x^{(0)}) = 0$. Мы можем сформулировать следующее следствие из предыдущей теоремы, используя новое понятие.

Следствие 31.2. *Если f дифференцируема в $x^{(0)}$, и $x^{(0)}$ — локальный экстремум f, то $x^{(0)}$ — стационарная точка.*

Доказательство. Вспомним, что

$$df(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_k} dx_k.$$

Из теоремы 31.1 следует, что $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_k} = 0$, а значит, вся сумма тоже равна 0. **[:||||:]**

Обратное неверно! Действительно, рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - y^2$. Точка $(0, 0)$ — стационарная, т.к. $df(x, y) = 2xdx - 2ydy|_{(0,0)} = 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда при $x = \varepsilon,\ y = \frac{\varepsilon}{2},\ f(x, y) > 0$, а при $x = \frac{\varepsilon}{2},\ y = \varepsilon,\ f(x, y) < 0$.

Функцию $A(\xi) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$, где $\xi \in \mathbb{R}^n,\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ a_{ij} = a_{ji}$ называют **квадратичной формой**. В качестве примера квадратичной формы можно привести функцию $A(x, y) = x^2 + xy + y^2$ или, что более важно, дифференциал второго порядка. Действительно,

$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i x_j.$$

Более подробно квадратичные формы будут рассмотрены нами в курсе линейной алгебры. Будем называть квадратичную форму $A(\xi)$:

- **Положительно определенной**, если $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A(\xi) > 0$.
- **Отрицательно определенной**, если $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A(\xi) < 0$.
- **Определенной**, если она либо положительно, либо отрицательно определена.
- **Неопределенной**, если $\exists \xi_1, \xi_2 : A(\xi_1) > 0,\ A(\xi_2) < 0$.

Лемма 31.3. *Если квадратичная форма $A(\xi)$ положительно определена, то $\exists \mu > 0 : A(\xi) \geqslant \mu|\xi|^2 \geqslant 0$.*

Доказательство. Сразу рассмотрим случай, когда $|\xi| = 0$. Тогда, очевидно, выполняется $0 \geqslant 0 \geqslant 0$, поэтому далее считаем, что $|\xi| > 0$.

Разделим обе части неравенства на $|\xi|^2$: $\frac{A(\xi)}{|\xi|^2} \geqslant \mu$. Заметим, что

$$\frac{A(\xi)}{|\xi|^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{\xi_i}{|\xi|} \cdot \frac{\xi_j}{|\xi|} = A\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

Как мы уже знаем, $\frac{\xi}{|\xi|}$ — единичный вектор. Рассмотрим множество $S = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid |\eta| = 1\}$. Данное множество — ***компакт***, т.е. оно замкнуто и ограничено. Тогда по второй теореме Вейерштрасса и, пользуясь непрерывностью $A(\eta)$, получаем, что $\exists \min\limits_{\eta\in S} A(\eta) = \mu$. Указанное $\mu > 0$ по условию, а по его определению $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \geqslant \mu$. **[:|||||:]**

Теорема 31.4 (*Достаточное условие строгого локального экстремума*). *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в стационарной точке $x^{(0)}$. Тогда если $d^2f(x^{(0)})$ — определенная квадратичная форма, то $x^{(0)}$ — локальный экстремум. Причем если $d^2f(x^{(0)}) < 0$, то $x^{(0)}$ — локальный максимум, а если $d^2f(x^{(0)}) > 0$, то $x^{(0)}$ — локальный минимум. Если же $d^2f(x^{(0)})$ не определена, то $x^{(0)}$ не является локальным экстремумом.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функций многих переменных:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j + \bar{o}(\Delta x^2).$$

Пусть для начала $d^2f(x^{(0)}) > 0$. Поскольку $x^{(0)}$ — стационарная точка, то из теоремы 31.1 $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_k} = 0$. Запишем также $\bar{o}(\Delta x^2) = \alpha(\Delta x)|\Delta x|^2$. Тогда получаем:

$$\Delta f = |\Delta x|^2 \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\Delta x_i}{|\Delta x|} \cdot \frac{\Delta x_j}{|\Delta x|} + \alpha(\Delta x)\right) \geqslant |\Delta x|^2 \left(\frac{1}{2}\mu + \alpha(\Delta x)\right).$$

Так как $\alpha(\Delta x) \to 0$, то $\exists \delta > 0 : \forall \Delta x,\ 0 < \Delta x < \delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| < \frac{\mu}{4}$. Тогда

$$\Delta f > |\Delta x|^2 \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{4}\right) = |\Delta x|^2 \cdot \frac{\mu}{4} > 0.$$

Значит, $x^{(0)}$ — строго локальный минимум. Случай, когда $d^2f(x^{(0)}) < 0$ доказывается аналогично. Для этого нужно также доказать лемму, что $A(\xi) \leqslant -\mu|\xi|^2$, где $A(\xi)$ — отрицательно определенная.

Пусть теперь $A(\xi)$ не определена, т.е. $\exists \xi_1, \xi_2 : A(\xi_1) > 0,\ A(\xi_2) < 0$. Пусть $\eta' = \frac{\xi_1}{|\xi_1|},\ \eta'' = \frac{\xi_2}{|\xi_2|}$. $\exists \Delta x = \eta' \cdot t$, где $t > 0$. Мы уже знаем, что $A(\eta') \geqslant \gamma|\eta'|^2 = \gamma$. Тогда

$$|\Delta x| = t \Rightarrow \Delta f \geqslant t^2 \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha(\Delta x)\right) > t^2 \cdot \frac{\gamma}{4} > 0.$$

С другой стороны, $A(\eta'') \leqslant \beta|\eta''|^2 = \beta$:

$$\Delta f \leqslant t^2 \left(\frac{\beta}{2} + \alpha(\Delta x)\right) < t^2 \cdot \frac{3\beta}{4} < 0.$$

Мы показали, что в любой окрестности $x^{(0)}$ существуют точки, в которых $\Delta f < 0$ и $\Delta f > 0$. Следовательно, $x^{(0)}$ не является локальным экстремумом. **[:|||||:]**

Часть 32

Безусловный экстремум функции нескольких переменных II

1 Необходимое условие локального экстремума в терминах второй производной

Теорема 32.1. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $x^{(0)}$ — точка локального экстремума, то либо $d^2f(x^{(0)}) \geqslant 0$, либо $d^2f(x^{(0)}) \leqslant 0$ для всех приращений в пределах этой окрестности.*

Доказательство. Пусть ради определенности $f(x)$ имеет в $x^{(0)}$ локальный минимум, но условие $d^2f(x^{(0)}) \geqslant 0$ не выполняется. Тогда найдутся такие $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, что

$$d^2f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x^{(0)})dx_i dx_k < 0.$$

Рассмотрим функцию $F(t) = f(x_1^{(0)} + tdx_1, x_2^{(0)} + tdx_2, \ldots, x_m^{(0)} + tdx_m)$, определенную при всех достаточно малых по модулю t (в пределах этой окрестности). Функция $F(t)$ имеет локальный минимум при $t = 0$. Заметим, что

$$F''(0) = d^2f(x^{(0)}) < 0.$$

Но тогда $x^{(0)}$ — локальный максимум по теореме 23.4. **[:|||||:]**

2 Критерий Сильвестра

Теорема 32.2 (*Положительная определенность*). *Квадратичная форма $A(\xi)$ является положительно определенной т.и.т.т., когда все главные миноры матрицы (a_{ij}) строго положительные.*

Главными минорами называются миноры вида

$$|a_{11}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следствие 32.3 (*Отрицательная определенность*). *Квадратичная форма $A(\xi)$ является отрицательно определенной т.и.т.т., когда квадратичная форма $-A(\xi)$ положительно определена, т.е. для всех главных миноров матрицы (a_{ij}) порядка i выполняется $(-1)^i\Delta_i > 0$.*

3 Достаточное условие локального экстремума для функции двух переменных

Теорема 32.4. *Пусть функция $f(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема в стационарной точке (x_0,y_0). Найдем определитель матрицы Гессе:*

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = D.$$

Тогда:

1. *Если $D > 0$, то (x_0,y_0) — локальный экстремум, причем если $f''_{xx} > 0$, то локальный минимум, а если $f''_{xx} < 0$, то локальный максимум.*
2. *Если $D < 0$, то (x_0,y_0) не является локальным экстремумом.*
3. *Если $D = 0$, то (x_0,y_0) может как и являться локальным экстремумом, так и нет.*

Доказательство.

1. Напрямую вытекает из теоремы 31.4 и критерия Сильвестра.
2. Вспомним, что $d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$. Если $f''_{xx}(x_0,y_0) \neq 0$, то подставим во второй дифференциал $dx = tdy$, где $t \in \mathbb{R}$. Тогда
$$d^2f = f''_{xx}t^2dy^2 + 2f''_{xy}tdy^2 + f''_{yy}dy^2,$$
$$d^2f = dy^2(f''_{xx}t^2 + 2f''_{xy}t + f''_{yy}).$$
Рассмотрим последнее выражение в скобках. Заметим, что из условия теоремы его дискриминант всегда больше нуля. Значит, при должном выборе параметра t можно получить $d^2f > 0$ или $d^2f < 0$, а следовательно локального экстремума нет.
Если $f''_{xx} = 0$ и $f''_{yy} \neq 0$, то аналогично сделаем замену $dy = tdx$. Если же $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$, то из условия теоремы $f''_{xy} \neq 0$. Тогда, приняв $dx = tdy$, получаем
$$d^2f = 2tf''_{xy}dy^2.$$
Выбирая $t = \pm 1$, имеем разные знаки у d^2f.
3. Пусть $f_1 = x^4y^4$ и $f_2 = x^4 - y^4$. У обеих функций все частные производные второго порядка в точке $(0,0)$ равны 0, а значит и $d^2f_1(0,0) = d^2f_2(0,0) = 0$. Но f_1 имеет локальный минимум в точке $(0,0)$, а у f_2 данная точка не является локальным экстремумом.

[:||||:]

Формула Тейлора и замена переменных для ФНП

Формула Тейлора в многомерном случае

Сейчас мы обобщим изученную ранее формулу Тейлора на многомерный случай. Как и в одномерном случае, мы хотим упростить некоторую функцию $f(\bar{x})$, чтобы облегчить ее анализ в какой-то окрестности точки $x^{(0)}$. Предположим пока, что $f(x, y)$ — функция двух переменных, а $x^{(0)} = (0, 0)$. Мы можем представить искомое разложение примерно так:

$$f(x, y) \approx c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + \dots,$$

где c_{ij} — некоторые коэффициенты.

Заметим, что $f(0, 0) = c_{00}$, а также $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = c_{10}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = c_{01}$. Продолжая, получаем

$$c_{ij} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0) \cdot \frac{1}{i! \cdot j!}.$$

Теперь попробуем выписать похожую формулу для $x^{(0)} = (x_0, y_0)$. По аналогии с формулой Тейлора для одномерного случая:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx f(0, 0) + &\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y}^{df} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 \cdot \frac{1}{2! \cdot 0!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y \cdot \frac{1}{1! \cdot 1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 \cdot \frac{1}{0! \cdot 2!}\right) + \dots = \\ &= f(0, 0) + df + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 \cdot \frac{2!}{0! \cdot 2!}\right)}_{d^2 f} + \dots \end{aligned}$$

Т.е. $f(x, y) = f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{1}{2!}d^2 f(0, 0) + \dots$. Когда переменных больше двух, используется эта же формула:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \underbrace{f(x^{(0)}) + \frac{1}{1!}df + \frac{1}{2!}d^2 f + \dots + \frac{1}{n!}d^n f}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_{n+1}}_{\text{остаточный член}}.$$

Так же, как и в одномерном случае, остаточный член может быть выражен разными способами.

Теорема (*Остаточный член в форме Лагранжа*). *Пусть функция $y = f(\bar{x})$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки $x^{(0)}$. Тогда для любого x из этой окрестности $\exists \widetilde{x}$ ($\widetilde{x} = x^{(0)} + \Theta(x - x^{(0)})$, $\Theta \in [0, 1]$), такое что*

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \frac{1}{1!}df + \dots + \frac{1}{n!}d^n f + \frac{1}{(n+1)!}\, d^{n+1} f\big|_{\widetilde{x}}.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное x из окрестности $x^{(0)}$. Рассмотрим функцию $F(t) = f(x^{(0)} + t(x - x_0))$. Фактически мы рассматриваем функцию $f(x)$ на отрезке между точками x и $x^{(0)}$. Заметим, что $F(t)$ — функция одной переменной, дифференцируемая $m + 1$ раз на отрезке $[0, 1]$, а значит, справедлива формула Тейлора для одномерного случая:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \dots + \frac{F^{(m+1)}(t_F)}{(m+1)!}. \tag{1}$$

Поскольку $dt = 1$, то $F^{(k)}(0) = d^k F(0)$. Сложная функция $F(t) = f(x(t))$ образована с помощью линейной замены переменных $(x_1, \dots, x_m)$ ($x_i(t) = x_i^{(0)} + t(x_i - x_i^{(0)})$). По теореме об инвариантности формы дифференциала любого порядка линейной функции[1] $d^k f(x^{(0)}) = d^k F(0) = F^{(k)}(0)$. Подставляя данные дифференциалы в формулу (1), получаем то, что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

[1]Эта теорема нами не доказывалась, но ее справедливость подкреплена авторитетом лектора ©

Теорема (***Остаточный член в форме Пеано***). *Пусть функция $y = f(\bar{x})$ n раз дифференцируема в точке $x^{(0)}$. Тогда для любого x из окрестности $x^{(0)}$ справедливо*

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \frac{1}{1!}df + \dots + \frac{1}{n!}d^n f + \bar{o}(\|x - x^{(0)}\|^n).$$

Доказательство. Пусть $g(x) = f(x^{(0)}) + \frac{1}{1!}df + \dots + \frac{1}{n!}d^n f$. Как мы уже знаем, многочлен Тейлора строится таким образом, что $f(x^{(0)}) = g(x^{(0)})$, причем все частные производные (всех порядков до n включительно) в точке $x^{(0)}$ у них также равны. Тогда рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. Из вышесказанного следует, что

$$h(x^{(0)}) = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^{(0)}) = \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^{(0)}) = \dots = \frac{\partial h}{\partial x_m}(x^{(0)}) = 0,$$
$$\dots\dots$$
$$\frac{\partial^n h}{\partial x_1^n}(x^{(0)}) = \frac{\partial^n h}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2} = \dots = 0.$$

Докажем по индукции, что для любой функции $h(x)$, удовлетворяющей вышеприведенным свойствам, $h(x) = \bar{o}(\|\Delta x\|^n)$. Пусть $n = 1$. Тогда по определению полного приращения:

$$h(x) - h(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial x_i}\Delta x_i + \bar{o}(\|\Delta x\|).$$

Тогда из (2) следует, что $h(x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$. Пусть теперь утверждение верно для некоторого n. Для любого i функция $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ n раз дифференцируема и удовлетворяет условиям (2). Значит, $\frac{\partial h}{\partial x_i} = \bar{o}(\|\Delta x\|^n)$.

Разложим $h(x)$ по теореме Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа до первого члена:

$$h(x) = h(x^{(0)}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial x_i}(\widetilde{x})(x_i - x_i^{(0)}).$$

Помним, что $h(x^{(0)}) = 0$. Разделим обе части равенства на $\|\Delta x\|^{n+1}$.

$$\frac{h(x)}{\|\Delta x\|^{n+1}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial x_i}(\widetilde{x}) \cdot \frac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|^{n+1}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}(\widetilde{x})}{\|\Delta x\|^n} \cdot \frac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}(\widetilde{x})}{\|\Delta \widetilde{x}\|^n} \cdot \frac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|} \cdot \frac{\|\Delta \widetilde{x}\|^n}{\|\Delta x\|^n}.$$

Поскольку $\widetilde{x}$ — точка, лежащая между x и $x^{(0)}$, то $\frac{\|\Delta\widetilde{x}\|^n}{\|\Delta x\|^n} \leqslant 1$. По определению Δx, $\left|\frac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|}\right| \leqslant 1$. По предположению индукции для $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ получаем, что $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\widetilde{x})/\|\Delta\widetilde{x}\|^n \to 0$. В итоге, имеем произведение бесконечно малой на ограниченные функции. Т.е. $\frac{h(x)}{\|\Delta x\|^{n+1}} \to 0$, а значит, $h(x) = \bar{o}(\|\Delta x\|^{n+1})$. **[:|||||:]**

Замена переменных в дифференциальных уравнениях

Предположим, что есть некоторое функциональное уравнение $f\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$. В исходном виде уравнение может быть достаточно сложным (чаще всего так и бывает), поэтому может потребоваться перейти к другим переменным, чтобы упростить уравнение. Сам поиск подходящей замены — это отдельное искусство, овладеть которым можно лишь после долгой практики. Здесь же мы рассмотрим техническую сторону этого вопроса, т.е. научимся производить замену переменных.

1. Пусть $z = z(x, y)$, и нужно решить уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Произведем замену $\xi = x + y,\ \eta = x - y$. Выразим теперь обе указанные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Т.е. получаем уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = -\frac{\partial z}{\partial \eta} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0,$$

решить которое обычно значительно проще. Следует отметить, что если в уравнении бы присутствовали также и сами x, y, то их также нужно было бы выразить через ξ и η. В данном случае это не представляет какой-либо сложности, но в других ситуациях может оказаться непростым делом. Поэтому выбор подходящей замены — это искусство.

2. Теперь рассмотрим переход к полярным координатам. Пусть есть уравнение

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Мы хотим перейти к $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Необходимо найти частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}} \cdot \frac{\partial y}{\partial r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Здесь рамкой выделены неизвестные. Нетрудно убедиться, что это не что иное, как система линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \cos\varphi\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ -r\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial x} + r\cos\varphi\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Решим систему с помощью метода Крамера:

$$\Delta = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r,$$
$$\Delta_1 = \frac{\partial u}{\partial r} r\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi,$$
$$\Delta_2 = \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi} + r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r} + \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Теперь подставляем полученное в исходное уравнение:

$$\cos^2\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}+r\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-r\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin^2\varphi=0,$$
$$2\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0\Leftrightarrow\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0.$$

3. Наконец, рассмотрим выражение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z},$$

где $z=z(x,y)$. Введем новые переменные: $\xi=2x-z^2$, $\eta=-\frac{y}{z}$. Действуем так же, как и в предыдущий раз. Единственное отличие состоит в том, что теперь при дифференцировании нужно учитывать, что $z=z(x,y)$ — сложная функция. Получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\left(2-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial\eta}\left(\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\left(-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial\eta}\left(-\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

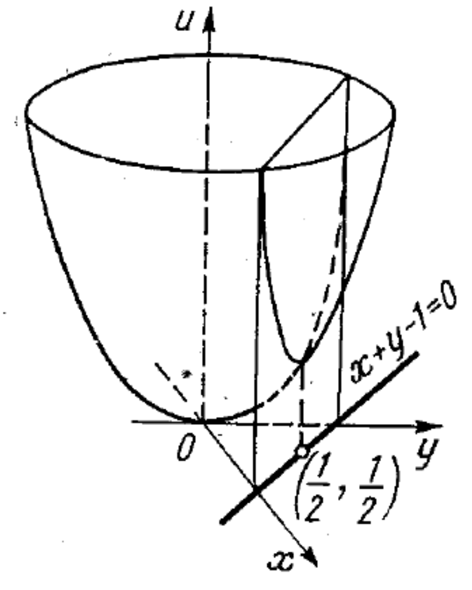
Отсюда можно выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и подставить в исходное уравнение (не забывая также выразить x и y).

Часть 33-34

Условный локальный экстремум

На практике достаточно редко приходится искать экстремумы функции в чистом виде. Обычно нас интересует множество точек функции, удовлетворяющих некоторым условиям. Например, пусть $f(x,y)=x^4-y^4$. Если задано ограничение, что $x=0$, то $(0,0)$ — точка локального максимума, а если $y=0$, то локального минимума.

Рассмотрим теперь более сложный пример. Пусть $f(x,y)=x^2+y^2$ и задано ограничение $x+y-1=0$. Фактически мы можем записать, что $f(x)=2x^2-2x+1$. $x=\frac{1}{2}$ — точка минимума этой функции. Тогда $y=\frac{1}{2}$, т.е. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ — локальный минимум.



Пусть $f(\bar{x})$ задана в открытой области $\mathbb{G}\subset\mathbb{R}^n$, а в $\mathbb{G}$ заданы функции $\varphi_1(\bar{x}),\ldots,\varphi_m(\bar{x})$ (причем $1\leqslant m<n$). Тогда уравнения $\varphi_i(\bar{x})=0$, $i=\overline{1,m}$ называются **уравнениями связи (условиями ограничения)**. Пусть $\mathbb{E}=\{\bar{x}\mid\bar{x}\in\mathbb{G},\ \varphi_i(\bar{x})=0,\ i=\overline{1,m}\}$.

Назовем точку $x^{(0)}$ **условным (относительным)** локальным максимумом, если $\exists\mathrm{U}'(x^{(0)})$ такая, что $f(\bar{x})<f(x^{(0)})$ для $\forall\bar{x}\in\mathbb{E}\cap\mathrm{U}'(x^{(0)})$. Аналогично, если в данном определении поставить знак $>$, то получаем определение условного локального минимума.

1 Метод исключения для нахождения точек условного экстремума

Предположим, что функции f и φ_i дважды непрерывно дифференцируемы. Кроме того,

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} = m.$$

Иными словами, у этой матрицы есть отличный от 0 минор порядка m. Пусть, без потери общности, это левый верхний квадрат матрицы, т.е. $\left|\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right| \neq 0$. Тогда по теореме 30.2 система неявных функций $\varphi_i(\bar{x}) = 0,\ i = \overline{1,m}$ может быть решена относительно переменных $x_1,\dots,x_m$ так, что

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_1(x_{m+1},\dots,x_n),\\ &\dots\\ x_m &= \mu_m(x_{m+1},\dots,x_n). \end{aligned}$$

Теперь выполним подстановку:

$$g(\widetilde{x}) = f(\mu_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\mu_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n).$$

Здесь $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$, т.е. фактически имеем функцию $g(x_{m+1},\dots,x_n)$. Тем самым мы свели задачу поиска условного экстремума функции f к поиску безусловного экстремума функции g.

2 Метод неопределенных множителей Лагранжа

Для удобства снова запишем условие задачи:

$$\begin{cases} f(\bar{x}) \to \operatorname{extr}\\ \varphi_1(\bar{x}) = 0\\ \dots\\ \varphi_m(\bar{x}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Воспользуемся результатами, полученными выше. Вспомним, что в силу инвариантности первой формы дифференциала, если $dg(x^{(0)}) = 0$, то и $df(x^{(0)}) = 0$. А это аналогично тому, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)})dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)})dx_n = 0. \tag{2}$$

Теперь возьмем условия связи $\varphi_i(\bar{x}) = 0,\ i = \overline{1,m}$ и продифференцируем их:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x^{(0)})dx_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}(x^{(0)})dx_m + \dots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(x^{(0)})dx_n &= 0\\ \dots\\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}(x^{(0)})dx_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m}(x^{(0)})dx_m + \dots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}(x^{(0)})dx_n &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

Функцией Лагранжа для задачи поиска условного экстремума (1) называется функция

$$\mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_m\varphi_m(\bar{x}),\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Домножим каждое уравнение системы (3) на соответствующее λ_i и сложим с (2):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1+\dots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}dx_1+\dots+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}dx_n+\dots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}dx_n=$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\lambda_1+\dots+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}\lambda_m\right)dx_1+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\lambda_1+\dots+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}\lambda_m\right)dx_n=$$
$$=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_m}dx_m+\dots+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_n}dx_n=d\mathcal{L}=0.$$

Важно понимать, что на основе последнего равенства мы не можем сразу заключить, что все частные производные $\mathcal{L}$ равны 0, т.к. переменные $x_1,\dots,x_m$, вообще говоря, зависят от $x_{m+1},\dots,x_n$. Попробуем выбрать $\overline{\lambda_0}=(\lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)})$ так, чтобы частные производные $\mathcal{L}'_{x_1},\dots,\mathcal{L}'_{x_m}$ обратились в 0, т.е. решим систему

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\dots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} &=0\\ \dots\\ \frac{\partial f}{\partial x_m}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}+\dots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m} &=0\end{cases}\tag{4}$$

Вспомним, что по нашему предположению $\left|\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right|\neq0$. Но это значит, что у этой системы из m уравнений и m неизвестных существует единственное решение $\overline{\lambda_0}$. Тогда дифференциал $\mathcal{L}$ приобретает вид

$$d\mathcal{L}(\bar{x},\overline{\lambda_0})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}+\lambda_1^{(0)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{m+1}}+\dots+\lambda_m^{(0)}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{m+1}}\right)dx_{m+1}+\dots+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1^{(0)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\dots+\lambda_m^{(0)}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}\right)dx_n=0.$$

Переменные $x_{m+1},\dots,x_n$ уже независимы, поэтому мы можем записать следующую систему, добавив в нее также условия связи:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}+\lambda_1^{(0)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{m+1}}+\dots+\lambda_m^{(0)}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{m+1}}=0\\ \dots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1^{(0)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\dots+\lambda_m^{(0)}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0\\ \varphi_1(x)=0\\ \dots\\ \varphi_m(x)=0\end{cases}\tag{5}$$

Теперь если объединить эту систему с системой (4), то получим систему, состоящую из $(n+m)$ уравнений и $(n+m)$ неизвестных.

Тогда если точка $M_0=(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ является стационарной, то она необходимо удовлетворяет системе (4) + (5). Тем самым мы доказали следующую теорему:

Теорема 33-34.1 (***Необходимое условие существования условного экстремума по методу Лагранжа***). *Пусть функции f и $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ дифференцируемы в точке $M_0=(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$, и функция f имеет условный экстремум в точке M_0 при заданных ограничениях φ. Тогда координаты M_0 необходимо удовлетворяют системе (4) + (5).*

3 Достаточные условия существования условного экстремума по методу Лагранжа

Пусть для точки M_0 выполняются необходимые условия существования условного экстремума, т.е. M_0 удовлетворяет системе (4) + (5). Пусть f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды дифференцируемы в некоторой $\mathrm{U}(M_0)$ и имеют непрерывные частные производные в самой M_0.

По определению функции $\mathcal{L}$ и, исходя из выбора M_0 и $\overline{\lambda_0}$,

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(M_0) \text{ и } \Delta\mathcal{L}(\bar{x}, \overline{\lambda_0}) = \mathcal{L}(\bar{x}, \overline{\lambda_0}) - \mathcal{L}(M_0, \overline{\lambda_0})$$

совпадают. Запишем $d^2\mathcal{L}$ с помощью формального символа, не забывая, что первые m переменных в свою очередь сами являются функциями переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$:

$$d^2\mathcal{L} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 \mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}d^2x_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m}d^2x_m\right).$$

Поскольку мы выбирали λ таким образом, что все частные производные $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}$ обращаются в 0, то правая скобка обнуляется. Заметим, что мы можем исследовать $d^2\mathcal{L}$ на знакоопределенность только в том случае, когда все переменные независимы, т.е. нам нужно найти для всех $i = \overline{1, m}$ зависимость $dx_i = \Theta(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$. Дифференцируя условия связи, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}dx_m + \dots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}dx_n & = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m}dx_m + \dots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}dx_n & = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Благодаря условию $\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right|_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} \neq 0$ мы можем выразить $dx_1, \dots, dx_m$ через дифференциалы $dx_{m+1}, \dots, dx_n$. Тогда $d^2\mathcal{L} = K(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$. Для этого второго дифференциала выполнены все условия теоремы 31.4, а это значит, что знакоопределенность $d^2\mathcal{L}$ влечет существование условного экстремума, а знаконеопределенность влечет за собой его отсутствие. Иными словами, мы доказали следующую теорему:

Теорема 33-34.2. *Если координаты точки M_0 и λ_i удовлетворяют системе (4) + (5), функции f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды дифференцируемы в $\mathrm{U}(M_0)$, а их вторые частные производные непрерывны в самой M_0, то знакоопределенности $d^2\mathcal{L}$ достаточно для существования условного экстремума. Если $d^2\mathcal{L}$ не знакоопределен, то условного экстремума в точке M_0 нет.*

Например, пусть необходимо решить задачу для случая трех переменных и одного ограничения, т.е.

$$\begin{cases} f(x,y,z) \to \text{extr} \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{L} = f + \lambda\varphi$. Нужно решить систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} & = 0 \\ \varphi(x) & = 0 \end{cases}$$

Из этой системы найдем соответствующие x_0, y_0, z_0 и λ_0, после чего исследуем $d^2\mathcal{L} = K(dx, dy, dz)$. Следует отметить, что если мы в результате получили, что $d^2\mathcal{L}$ знаконеопределена, то нужно вспомнить про зависимость между дифференциалами dx_i. Иными словами, необходимо также решить систему

$$\begin{cases} d\varphi_1(x) & = 0 \\ \dots \\ d\varphi_m(x) & = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему, мы найдем зависимость между дифференциалами, при учете которой может оказаться, что $d^2\mathcal{L}$ знакоопределена.

Часть 35
Первообразная функция и неопределенный интеграл I

1 Основные определения

Для удобства введем следующее обозначение для произвольного промежутка (конечного или бесконечного) между a и b. Запись $\langle a, b \rangle$ может обозначать либо (a, b), либо $[a, b]$, либо $(a, b]$ или же $[a, b)$.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$, если $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ на $\langle a, b \rangle$. В этом определении если a и b принадлежат промежутку $\langle a, b \rangle$, то под $F'(a)$ и $F'(b)$ понимаются односторонние производные.

Если $F(x)$ первообразная $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$, то $F(x) + C$, где $C = const$, также является первообразной $f(x)$, т.к $(F(x) + C)' = F'(x)$. Верно и обратное: если $F(x)$ и $\Phi(x)$ первообразные функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$, то $F(x) = \Phi(x) + C$. Действительно, $(F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Но по теореме 18.3 $(F(x) - \Phi(x))' = 0 \Leftrightarrow F(x) - \Phi(x) = C$, т.е. $F(x) = \Phi(x) + C$.

Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$ называется **неопределенным интегрированием**. Если $F(x)$ — некоторая первообразная $f(x)$, то записывается

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Здесь $\int f(x)\, dx$ — это множество функций, являющихся первообразными функции f.

2 Свойства неопределенного интеграла

Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$.

1. По определению дифференциала $\int g'(x)\, dx = \int dg(x)$.

2. По определению первообразной $(\int f(x)\, dx)' = f(x)$.

3. $\int F'(x)\, dx = F(x) + C$ (снова по определению).

4. ***Линейность операции интегрирования***. Пусть существуют $\int f(x)\,dx$ и $\int g(x)\,dx$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда
$$\exists \int (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \pm \beta \int g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $F(x) = \alpha \int f(x)\,dx \pm \beta \int g(x)\,dx$. Тогда
$$F'(x) = \alpha \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \beta \left(\int g(x)\,dx\right)' = \alpha f(x) \pm \beta g(x),$$
что и требовалось доказать. **[:||||:]**

Заметим, что из 2 и 3 свойств вытекает, что дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Рассмотрим несколько примеров:

- $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
- $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n \Rightarrow \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n \neq -1$.
- При $n = -1$ имеем $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.

Важно отметить, что тождество $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ справедливо на области определения функции $f(x)$. Именно поэтому в последнем примере необходимо поставить знак модуля.

3 Методы интегрирования

Теорема 35.1 (*Интегрирование по частям*). *Пусть $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, и $\exists \int u'(x)v(x)\,dx$. Тогда $\exists \int u(x)v'(x)\,dx$, причем*
$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx, \text{ что эквивалентно } \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}.$$

Доказательство. $(uv - \int u'v\,dx)' = u'v + v'u - u'v = v'u$, из чего моментально следует доказываемое. **[:||||:]**

Например,
$$\int \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{matrix}\right\} = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x + C.$$

Разумеется, применять данный метод следует лишь в том случае, если найти интеграл vdu проще, чем udv.

Теорема 35.2 (*Замена переменных*). *Пусть $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на $[a, b]$, т.е. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, а функция $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ является дифференцируемой на $[\alpha, \beta]$. Тогда*
$$\exists \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\bigg|_{x=\varphi(t)} + C = F(\varphi(t)) + C. \tag{1}$$

Доказательство. $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, что и требовалось доказать. **[:||||:]**

Формулу 1 также можно записать в виде

$$\int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) = \int f(x)\, dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C.$$

Предположим теперь, что функция $\varphi(t)$ монотонна на $[\alpha, \beta]$. Тогда $\exists \varphi^{-1}(x)$ на $[\xi, \eta] = \varphi([\alpha, \beta])$, а значит справедлива следующая ***формула замены переменной***:

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}}.$$

А теперь рассмотрим пару примеров.

- Здесь $a \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{x\, dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2} = \{x^2+a^2 = y\} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

- Попробуем теперь вычислить $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Зоркий глаз сразу заметит сходство подкоренного выражения с основным тригонометрическим тождеством, чем мы и воспользуемся:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \left\{\begin{aligned} x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \\ 1 - x^2 = \cos^2 t \qquad\qquad \end{aligned}\right\} = \int |\cos t| \cos t\, dt =$$
$$= \{\text{т.к. } 1 - \sin^2 t \geqslant 0\} = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

Часть 36

Первообразная функция и неопределенный интеграл II

1 Разложение многочлена на множители

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с многочленами, поэтому вкратце вспомним основные моменты по этой теме из курса линейной алгебры.

1.1 Комплексные числа

Комплексным числом называется число вида $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а $i^2 = -1$. Вспомним некоторые свойства этих чисел:

- $z_1 = x_1 + iy_1 = z_2 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
- $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ — комплексное сопряжение.

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.
- $z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$.
- $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

1.2 Разложение многочлена на множители

Многочленом n-ой степени $P_n(z)$ называется выражение $P_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, где $a_i, z \in \mathbb{C}$ и $a_n \neq 0$. *Корнем многочлена* $P_n(z)$ называется такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что $P_n(z_0) = 0$. *Делением* $P_n(z)$ на $z-a$ называется представление в виде $P_n(z) = (z-a)Q_{n-1}(z)+r_n$, где Q_{n-1} — многочлен степени $n-1$, а r_n — остаток.

Теорема 36.1 (*Теорема Безу*). *Число z_0 является корнем $P_n(z)$ т.и.т.т., когда $P_n(z) = (z-z_0)Q_{n-1}(z)$, т.е. $r_n = 0$.*

Доказательство. $P_n(z) = (z-z_0)Q_{n-1}(z) + r_n$. $P_n(z_0) = 0 = 0 + r_n \Rightarrow r_n = 0$. **[:|||||:]**

Назовем z_0 корнем *кратности* k, если $P_n(z) = (z-z_0)^kQ_{n-k}(z)$, но $P_n(z) \neq (z-z_0)^{k+1}\widetilde{Q}_{n-k-1}(z)$. Если кратность корня равна 1, то такой корень называется *простым*.

Теорема 36.2 (*Основная теорема алгебры*). *У многочлена $P_n(z) \neq const$ всегда есть хотя бы один корень над полем комплексных чисел.*

Из этой теоремы и теоремы Безу моментально следует, что $P_n(z) = a_n(z-z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z-z_r)^{k_r}$, где $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = n$.

В дальнейшем будем считать, что все упоминаемые многочлены имеют ***вещественные*** коэффициенты, если иное не оговорено явно.

Лемма 36.3. *Пусть $z_0 = a + bi$, где $b \neq 0$ — корень уравнения $P_n(z) = 0$ кратности l. Тогда число $\overline{z_0} = a - bi$ также является корнем того же уравнения той же кратности.*

Доказательство. Пусть $P_n(z) = a_0 + \dots + a_nz^n$. Вычислим $P_n(\overline{z_0})$:

$$P_n(\overline{z_0}) = a_0 + a_1\overline{z_0} + \dots + a_n\overline{z_0}^n = \overline{a_0} + \overline{a_1z_0} + \dots + \overline{a_nz_0^n} = \overline{a_0 + \dots + a_nz_0^n} = \overline{P_n(z_0)} = \overline{0} = 0.$$

[:|||||:]

Учитывая, что z_0 и $\overline{z_0}$ — корни $P_n(z)$, разложим этот многочлен по теореме Безу:

$$P_n(z) = (z-a-ib)(z-a+ib)Q_{n-2}(z) = ((z-a)^2 + b^2)Q_{n-2}(z) = (z^2 - 2az + a^2 + b^2)Q_{n-2}(z).$$

Найдем дискриминант последнего трехчлена: $D = a^2 - a^2 - b^2 = -b^2 < 0$. Таким образом, многочлен представляется в виде $P_n(z) = \underbrace{(z^2 + pz + q)}_{\text{нет вещ. корней}} Q_{n-2}(z)$. Наконец, выпишем окончательное разложение многочлена на множители, которым и будем в дальнейшем пользоваться:

$$P_n(x) = a_n(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}\dots(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s},$$ причем $$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s}\beta_j = n.$$

2 Интегрирование рациональных дробей

На самом деле мы вывели некоторые свойства многочленов не просто так. У очень немногих функций можно выразить первообразную с помощью элементарных функций. Например, невыразим в них даже такой, казалось бы простой, интеграл $\int \sin x^2\, dx$. Однако есть классы функций, интегралы от которых всегда можно посчитать в элементарных функциях. Один из таких классов сейчас и рассмотрим.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены. Выражение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — **рациональная дробь**. Будем называть ее **правильной**, если степень многочлена $P(x)$ строго меньше степени $Q(x)$.

Лемма 36.4. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь, и* $Q(x) = (x-a)^\alpha \widetilde{Q}(x)$*, где* $\widetilde{Q}(a) \neq 0$*. Тогда*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\widetilde{Q}(x)}.$$

Здесь $A \in \mathbb{R}$ *и* $A \neq 0$*, а* $\widetilde{P}(x)$ *— какой-то многочлен.*

Доказательство. Запишем следующую разность:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha \widetilde{Q}(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{P(x) - A\widetilde{Q}(x)}{(x-a)^\alpha \widetilde{Q}(x)}.$$

Теперь выберем A так, чтобы число a было корнем числителя дроби, стоящей справа.

$$P(a) - A\widetilde{Q}(a) = 0 \Rightarrow A = \frac{P(a)}{\widetilde{Q}(a)}.$$

Теперь a является корнем многочлена $P(x) - \frac{P(a)}{\widetilde{Q}(a)} \cdot \widetilde{Q}(x)$. Но тогда этот многочлен имеет представление $(x-a)\widetilde{P}(x)$. Значит,

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha \widetilde{Q}(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{(x-a)\widetilde{P}(x)}{(x-a)^\alpha \widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\widetilde{Q}(x)}.$$

А это и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Лемма 36.5. *Пусть теперь* $Q(x) = (x^2+px+q)^\beta \widetilde{Q}(x)$*, причем многочлен* $x^2+px+q = (x-a-ib)(x-a+ib)$*, т.е. не имеет вещественных корней. Тогда*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}\widetilde{Q}(x)}.$$

Доказательство. Проведем доказательство по той же схеме. Рассмотрим разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} = \frac{P(x) - (Mx+N)\widetilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^\beta \widetilde{Q}(x)}.$$

Выберем M и N так, чтобы число $a+ib$ являлось корнем числителя:

$$P(a+ib) - (M(a+ib)+N)\widetilde{Q}(a+ib) = 0,$$

$$M(a+ib) + N = \frac{P(a+ib)}{\widetilde{Q}(a+ib)}.$$

Выразим M из равенства мнимых частей в последнем уравнении, а N выразим из равенства вещественных частей. Получаем, что

$$\begin{cases} M &= \operatorname{Im}\left(\frac{P(a+ib)}{\widetilde{Q}(a+ib)\cdot b}\right), \\ N &= \operatorname{Re}\left(\frac{P(a+ib)}{\widetilde{Q}(a+ib)} - Ma\right). \end{cases}$$

Поскольку $a+bi$ — корень числителя, то $a-bi$ тоже, а значит он представляется в виде $(x^2+px+q)\widetilde{P}(x)$. Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} = \frac{(x^2+px+q)\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^\beta \widetilde{Q}(x)}.$$

Что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Наконец, сформулируем следствие из двух последних лемм.

Следствие 36.6. *Пусть* $Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$. *Тогда*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{m=0}^{\alpha_i-1}\frac{A_{im}}{(x-a_i)^{\alpha_i-m}} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{\beta_j-1}\frac{M_{jl}x+N_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j-l}}.$$

Доказательство. Получаем последовательным применением лемм 36.4 и 36.5 ко всем корням знаменателя. **[:|||||:]**

Разумеется, на практике эти монструозные формулы не применяются в явном виде. Примеры взятия интегралов рациональных дробей читатель может найти на странице 322. Сейчас же докажем следующую теорему:

Теорема 36.7. *Любая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.*

Доказательство. Воспользуемся разложением рациональной дроби из теоремы 36.6. Фактически осталось лишь доказать, что в элементарных функциях интегрируются функции $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ и $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}$. Разберемся с ними по очереди. Во-первых,

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$$
$$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha}\,dx = \int A(x-a)^{-\alpha}\,dx = \frac{A(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C \text{ при } \alpha \neq 1.$$

Это было просто. Элементарность полученных результатов очевидна. Теперь вычислим второй интеграл. Для начала найдем решение для частного случая:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \left\{x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right\} = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}\,dx =$$

$$= \left\{\begin{gathered} x+\frac{p}{2} = t \Rightarrow dx = dt \\ x = t-\frac{p}{2} \end{gathered}\right\} = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt = M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \frac{N-\dfrac{Mp}{2}}{a^2}\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} = \frac{M}{2}\ln(a^2+t^2) + \frac{N-\dfrac{Mp}{2}}{a^2}\cdot a\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{a}\right) + C.$$

Заметим, что это элементарная функция. А теперь найдем ответ при $\beta \neq 1$ (в качестве t используется предыдущая замена):

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}\,dx \;=\; \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt \;=\; \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\beta} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\beta}.$$

Пока все сделано аналогично предыдущему частному случаю. Левое слагаемое мы можем с легкостью проинтегрировать, поэтому рассмотрим правое. Введем для него обозначение J_β.

$$J_\beta = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\beta} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^\beta} =$$
$$= \frac{1}{a^2}J_{\beta-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^\beta}.$$

Теперь рассмотрим последний интеграл. Имеем:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^\beta} = \frac{1}{2}\int \frac{td(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\beta} = \frac{1}{2(1-\beta)}\int td((t^2+a^2)^{1-\beta}).$$

Последнее внесение под дифференциал может показаться неочевидным, но читатель может проверить его, вынеся функцию из под знака дифференциала. Проинтегрируем последнее выражение по частям:

$$\frac{1}{2(1-\beta)}\int td((t^2+a^2)^{1-\beta}) = \left\{\begin{matrix} u=t & dv=d((t^2+a^2)^{1-\beta}) \\ du=dt & v=(t^2+a^2)^{1-\beta} \end{matrix}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2-2\beta}t(t^2+a^2)^{1-\beta} - \frac{1}{2-2\beta}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\beta-1}} = \frac{1}{2-2\beta}t(t^2+a^2)^{1-\beta} - \frac{1}{2-2\beta}J_{\beta-1}.$$

Таким образом, мы смогли выразить J_β через $J_{\beta-1}$. J_1 считается тривиально. Теперь, подставляя все полученные результаты в выражение для J_β, получаем

$$\begin{cases} J_1 &= \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x+\dfrac{p}{2}}{a} + C, \\ J_\beta &= \dfrac{x+\dfrac{p}{2}}{2a^2(\beta-1)\left(\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2\right)^{\beta-1}} + \dfrac{2\beta-3}{a^2(2\beta-2)}J_{\beta-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Теперь, используя выражение для J_β, вернемся к уже забытому нами интегралу. Получаем следующий результат:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}\,dx = -\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{\beta-1}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \frac{2N-Mp}{2}\cdot J_\beta + C.$$

Заметим, что ответ получен в элементарных функциях. Элементарность J_β следует из его рекурсивного определения (1). Действительно, J_1 элементарна. Предположим, что $J_{\beta-1}$ выражается в элементарных функциях. Тогда J_β элементарна как композиция элементарных функций. **[:||||:]**

Часть 37

Первообразная функция и неопределенный интеграл III

Сейчас мы докажем интегрируемость в элементарных функциях некоторых классов функций. Во всех доказательствах будет использоваться **рационализация** интегралов. А именно мы будем сводить интегрирование заданного выражения к интегрированию рациональной дроби, что по теореме 36.7 можно сделать в элементарных функциях. Запись $R(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает некоторое выражение, составленное с помощью арифметических операций над $x_1, \ldots, x_n$.

1 Некоторые тригонометрические выражения

Пусть необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx.$$

Для этого воспользуемся **универсальной тригонометрической подстановкой**:

$$\begin{aligned}
t &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t, \\
dx &= \frac{2\, dt}{1+t^2}, \\
\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\
\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Тем самым задача свелась к нахождению интеграла рациональной дроби:

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2\, dt}{1+t^2}.$$

Однако следует отметить, что несмотря на универсальность этой подстановки, использовать ее стоит только в крайнем случае, поскольку получаемая рациональная дробь чаще всего оказывается слишком громоздкой.

2 Дробно-линейные иррациональности

Теперь задача состоит в нахождении интеграла вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+f}}\right) dx, \text{ причем } af - bc \neq 0.$$

Сделаем подстановку:

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+f}} \Rightarrow t^n = \frac{ax+b}{cx+f} \Rightarrow t^n(cx+f) = ax+b,\\
x &= \frac{ft^n - b}{a - t^n c},\\
dx &= \frac{fnt^{n-1}(a-t^n c) + (ft^n - b)\cdot cnt^{n-1}}{(a-t^n c)^2}\,dt = \frac{(af-bc)\cdot nt^{n-1}\,dt}{(a-t^n c)^2}.
\end{aligned}
$$

И снова задача сведена к интегрированию рациональной дроби:

$$
\int R\left(\frac{ft^n-b}{a-t^n c}, t\right)\cdot\frac{(af-bc)\cdot nt^{n-1}\,dt}{(a-t^n c)^2}.
$$

3 Квадратичные иррациональности

Наконец, докажем интегрируемость в элементарных функциях следующего выражения:

$$
\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx.
$$

Здесь уже необходимо рассмотреть несколько случаев:

- При любых x верно, что $ax^2+bx+c>0$. Из этого вытекает, что $a>0$. Чтобы справиться с этим случаем, воспользуемся **первой подстановкой Эйлера**:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{ax^2+bx+c} &= t + x\sqrt{a},\\
bx + c = t^2 + 2tx\sqrt{a} &\Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},\\
dx &= \frac{2t(b-2t\sqrt{a}) + (t^2-c)\cdot 2\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt,\\
\sqrt{ax^2+bx+c} &= t + \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}.
\end{aligned}
$$

  Тогда получаем интеграл от рациональной дроби:

$$
\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, t + \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}\right)\cdot\frac{2t(b-2t\sqrt{a}) + (t^2-c)\cdot 2\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt.
$$

- $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, причем $x_1 \neq x_2$. Иными словами, многочлен ax^2+bx+c имеет два различных действительных корня. В этом случае на помощь приходит **вторая подстановка Эйлера**:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{ax^2+bx+c} &= t(x-x_1),\\
a(x-x_1)(x-x_2) &= t^2(x-x_1)^2,\\
a(x-x_2) = t^2(x-x_1) &\Rightarrow x = \frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2},\\
dx &= \frac{-2tx_1(a-t^2) + 2t(ax_2 - t^2x_1)}{(a-t^2)^2}\,dt,\\
\sqrt{ax^2+bx+c} &= t(x-x_1) = t\left(\frac{ax_2 - t^2x_1 - x_1a + x_1t^2}{a-t^2}\right) = \frac{ta(x_2-x_1)}{a-t^2}.
\end{aligned}
$$

И снова получился интеграл от рациональной дроби:

$$\int R\left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2}, \frac{ta(x_2-x_1)}{a-t^2}\right) \cdot \frac{-2tx_1(a-t^2)+2t(ax_2-t^2x_1)}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

- Многочлен ax^2+bx+c имеет ровно 1 вещественный корень. Заметим, что в этом случае $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$, т.е. под знаком корня стоит полный квадрат, а значит данный интеграл тривиален.

Некоторые примеры взятия интегралов можно найти на странице 322.

Часть 38

Определенный интеграл Римана I

1 Разбиение отрезка

Назовем **разбиением** отрезка $[a,b]$ множество[2]

$$\tau = \{x_i\}_{i=0}^n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Назовем τ^* **измельчением** разбиения τ, если любая точка разбиения τ является точкой разбиения τ^*. Этот факт будем обозначать как $\tau^* \succ \tau$.

1.1 Свойства измельчения

1. Если $\tau_2 \succ \tau_1$ и $\tau_3 \succ \tau_2$, то $\tau_3 \succ \tau_1$. Это свойство напрямую следует из определения.

2. Для любых τ_1 и τ_2 существует $\tau : \tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$. Действительно, достаточно выбрать в качестве τ все точки из τ_1 и τ_2. Т.е. взять $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ — объединение разбиений.

2 Определенный интеграл

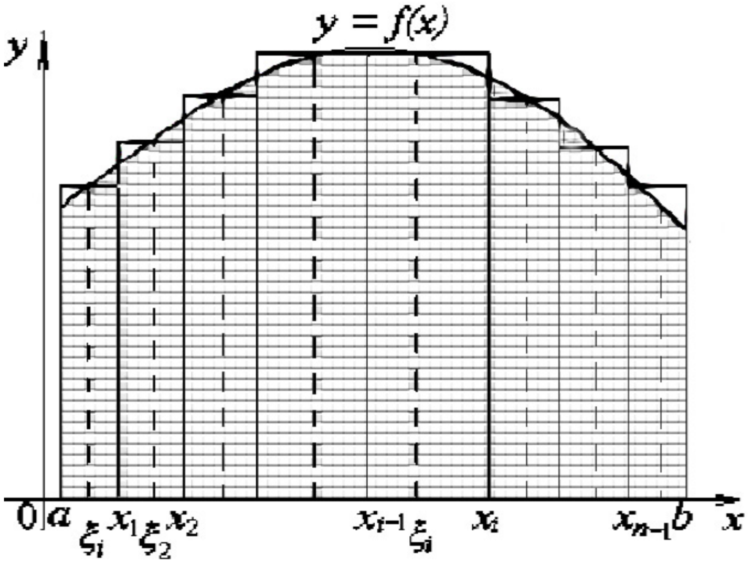
Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в каждой точке сегмента $[a,b]$. Введем несколько обозначений. Пусть $[x_{i-1}, x_i]$ — отрезок разбиения τ, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — его длина. Назовем **диаметром разбиения** число $d_\tau = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$, т.е. длину наибольшего интервала разбиения. Наконец, обозначим через ξ_i произвольную точку отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Назовем **интегральной суммой** функции f на $[a,b]$ сумму

$$S(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

[2] Спасибо Александре Корытовой за предоставленную лекцию.

Предположим, что $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) > 0$. Тогда $f(\xi_i)\Delta x_i$ — площадь прямоугольника со стороной Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Это проиллюстрировано на рисунке справа. Таким образом, интегральная сумма, отвечающая выбранному разбиению τ и промежуточным точкам ξ_i, представляет собой площадь ступенчатой фигуры. Нетрудно понять, что чем меньше диаметр разбиения, тем «ближе» эта площадь к площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.



Число I называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau,\ d_\tau < \delta,\ \forall (\xi_1, \ldots, \xi_n) \Rightarrow |S(f, \xi_i) - I| < \varepsilon.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется **интегрируемой по Риману** на сегменте $[a, b]$. Это обозначается как $f(x) \in \mathfrak{R}([a, b])$. Фактически по определению можно записать

$$I = \lim_{d_\tau \to 0} S(f, \tau) = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Следует отметить, что значение этого предела не должно зависеть от выбора x_i и ξ_i. Последняя запись, кстати, демонстрирует первоначальный смысл знака интеграла — это не что иное, как сумма. Теперь сформулируем несколько важных теорем.

3 Необходимое условие интегрируемости

Теорема 38.1. *Если функция $f(x)$ интегрируема по отрезку $[a, b]$, то она является ограниченной на нем.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $f(x)$ не ограничена на $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$. Тогда запишем интегральную сумму в следующем виде:

$$S(f, \tau) = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Выберем точки ξ_i произвольным образом для всех $i \neq k$. Поскольку $f(x)$ не ограничена на $[x_{k-1}, x_k]$, то точку ξ_k можно выбрать таким образом, чтобы сделать сумму справа сколь угодно большой. Сделаем эту сумму больше, чем, например, $\frac{1}{d_\tau}$. Но тогда $\nexists \lim\limits_{d_\tau \to 0} S_\tau(f, \xi_i)$, что противоречит условию. **[:||||:]**

Обратное неверно! Действительно, рассмотрим в качестве примера функцию Дирихле на отрезке $[0, 1]$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

С одной стороны, если выбрать все ξ_i так, что $D(\xi_i) = 1$ (т.е. $\xi_i \in \mathbb{Q}$), то $S(D, \xi_i) = 1$. Но если взять все $\xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то $S(D, \xi_i) = 0$.

4 Критерий интегрируемости функции по Риману

Назовем **колебанием** функции f на отрезке $[a,b]$ число

$$\omega(f,[a,b]) = \sup_{\xi',\xi''\in[a,b]} |f(\xi') - f(\xi'')| = \sup_{[a,b]} f(x) - \inf_{[a,b]} f(x).$$

Обозначим $\omega_i(f) = \omega(f,[x_{i-1},x_i])$.

Теорема 38.2. *Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ т.и.т.т., когда*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon) : \forall\tau,\ d_\tau<\delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Или, иными словами, $\lim\limits_{d_\tau\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i = 0.$

Доказательство.

- Докажем сначала необходимость. Пусть $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Тогда $\exists \lim\limits_{d_\tau\to 0} S_\tau(f,\xi_i) = I$. Т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon) : \forall\tau,\ d_\tau<\delta : |S_\tau(f,\xi_i) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$.

  Зафиксируем ε,δ,τ. Выберем теперь такие $\eta_i',\eta_i''\in[x_{i-1},x_i]$, что $\omega_i(f)\leqslant 2(f(\eta_i') - f(\eta_i''))$. Получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i\right| \leqslant \left|2\sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i') - f(\eta_i''))\cdot\Delta x_i\right| = 2\left|S_\tau(f,\eta') - S_\tau(f,\eta'')\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2(|S_\tau(f,\eta') - I| + |I - S_\tau(f,\eta'')|) \leqslant 2\left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon.$$

  Что и требовалось доказать.

- Теперь докажем достаточность. Для начала докажем следующую лемму:

  Лемма 38.3. *Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=1}^{k}$ и $\tau^*=\{x_i^*\}_{i=1}^{k^*}$. Тогда если $\tau^*\succ\tau$, то*

$$|S_\tau(f,\xi_i) - S_{\tau^*}(f,\xi_i^*)| \leqslant \sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\Delta x_i. \tag{1}$$

  Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок разбиения τ $[x_{i-1},x_i]$. В нем содержатся какие-то точки разбиения τ^*: $x_{J_{i-1}} < x_{J_{i-1}+1} < \dots < x_{J_i}$, причем $x_{J_{i-1}} = x_{i-1}$ и $x_{J_i} = x_i$. Тогда $\sum\limits_{j=J_{i-1}}^{J_i}\Delta x_j = \Delta x_i$. Выберем на $[x_{i-1},x_i]$ точку ξ_i и на каждом маленьком подотрезке этого отрезка точки ξ_j^*. Теперь рассмотрим разность

$$\left|f(\xi_i)\cdot\Delta x_i - \sum_{j=J_{i-1}}^{J_i} f(\xi_j^*)\cdot\Delta x_j\right| = \left|f(\xi_i)\sum_{j=J_{i-1}}^{J_i}\Delta x_j - \sum_{j=J_{i-1}}^{J_i} f(\xi_j^*)\cdot\Delta x_j\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=J_{i-1}}^{J_i}\Delta x_j(f(\xi_i) - f(\xi_j^*))\right| \leqslant \left|\sum_{j=J_{i-1}}^{J_i}\omega_i(f)\Delta x_j\right| = \omega_i(f)\Delta x_i.$$

  Т.к. это выполнено для любого i, а разность слева в данном неравенстве является частью разности интегральных сумм в (1), то получили то, что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Пусть теперь $\tau' = \{x'_i\}_{i=1}^{k'}$ и $\tau'' = \{x''_i\}_{i=1}^{k''}$ — произвольные разбиения отрезка $[a, b]$. Возьмем разбиение $\tau^* = \tau' \cup \tau''$. Тогда по лемме получаем

$$|S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| \leqslant |S_{\tau'}(f) - S_{\tau^*}(f)| + |S_{\tau^*}(f) - S_{\tau''}(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k'} \omega'_i(f)\Delta x'_i + \sum_{i=1}^{k''} \omega''_i(f)\Delta x''_i. \quad (2)$$

Из последнего неравенства и неравенства из условия теоремы вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : d_{\tau'}, d_{\tau''} < \delta \Rightarrow |S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Заметим, что это условие очень похоже на условие Коши для числовых функций. Возьмем произвольную последовательность разбиений $\tau_n = \left\{x_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{k_n}$, для которой $d_{\tau_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Для каждого такого разбиения τ_n, отметив произвольно точки $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}$, составим сумму Римана $S_{\tau_n}(f)$ и рассмотрим числовую последовательность $\{S_{\tau_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$. Она является фундаментальной, т.к. в силу (3) для

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n, m \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |S_{\tau_n}(f) - S_{\tau_m}(f)| < \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши она сходится. Пусть $I = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\tau_n}\left(f, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}\right)$. Выбираем разбиение τ с диаметром $d_\tau < \delta$. В силу (2) имеем:

$$|S_{\tau_n}(f) - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \omega_i^{(n)}(f)\Delta x_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$|I - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon \Rightarrow \lim_{d_\tau\to 0} S_\tau(f) = I.$$

Что и требовалось доказать.

[:|||||:]

Часть 39

Определенный интеграл Римана II

1 Интегральные суммы Дарбу

Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$. В этом случае функция также ограничена на любом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, а значит, $\exists \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = M_i$ и $\exists \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = m_i$. **Верхней суммой Дарбу** и **нижней суммой Дарбу** называют соответственно

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \overline{S_\tau}(f),$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \underline{S_\tau}(f).$$

Установим геометрический смысл введенных сумм. Рассмотрим i-ый отрезок разбиения τ, а именно $[x_{i-1}, x_i]$. Вспомним, что в S_τ входят все слагаемые вида $\xi_k \Delta x_k$, в том числе и $\xi_i \Delta x_i$ — некоторый прямоугольник, площадь которого примерна равна площади участка $[x_{i-1}, x_i]$ под графиком. Нетрудно понять, что $M_i \Delta x_i$ — это наименьший прямоугольник, в котором содержится эта часть графика. А $m_i \Delta x_i$ — это наибольший прямоугольник, который целиком содержится внутри этой части.

Таким образом, можно сказать, что $\underline{S_\tau}(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant \overline{S_\tau}(f)$. Более того, несложно доказать, что $f(x) \in \mathfrak{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau,\ d_\tau < \delta \Rightarrow \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon$.

2 Достаточные признаки интегрируемости

Теорема 39.1 (*Интегрируемость монотонной функции*). *Если ограниченная на $[a,b]$ функция является монотонной на нем, то $f(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$.*

Доказательство. Предположим, не теряя общности, что $f(x)$ не убывает на $[a,b]$. Тогда своего максимального значения на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция достигает в точке x_i, а минимального в x_{i-1}. Поэтому можно записать

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant d_\tau \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = d_\tau (f(b) - f(a)).$$

Нужно доказать, что эта величина меньше, чем заданное ε. Если $f(a) = f(b)$, то при любом выборе δ это неравенство справедливо. В противном же случае можно выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, и тогда неравенство будет верным при всех $d_\tau < \delta$, что и требовалось доказать. **[:||||:]**

Теорема 39.2 (*Интегрируемость непрерывной функции*). *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$.*

Доказательство. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме 20.4 она и равномерно непрерывна на нем. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \alpha, \beta \in [a,b] : |\alpha - \beta| < \delta \Rightarrow |f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Но тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

[:||||:]

Следствие 39.3. *Если $f(x)$ непрерывна на (a,b) и $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то $f(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$.*

Доказательство. Возьмем некоторое произвольное $\varepsilon > 0$. Запишем интегральную сумму в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ [x_{i-1},x_i] \in [a,a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon,b]}}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ [x_{i-1},x_i] \in [a+\varepsilon,b-\varepsilon]}}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Тем самым мы разбили интегральную сумму на 2 части: ту, отрезки которой содержатся в ε-окрестностях точек a и b, и ту, в которой содержатся все оставшиеся отрезки. Заметим, что по предыдущей теореме эта 2 часть меньше, чем некоторое ε', т.к. все ее отрезки целиком покрываются отрезком $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. С другой стороны, по определению колебания функции на отрезке можно записать, что $\omega_i(f) \leqslant 2M$ для некоторого M. Отрезочки в 1 части суммы имеют длину 2ε. Но тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < 2M \cdot 2\varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon''$. **[:||||:]**

Следствие 39.4. *Пусть $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, т.е. существует разбиение $\{x_i\}_{i=0}^n$ такое, что*

- *$f(x)$ непрерывна на $\forall(x_{i-1}, x_i)$.*
- *$\exists f(x_i - 0)$ и $\exists f(x_i + 0)$ для всех i (для точек a и b должен существовать один соответствующий односторонний предел).*

Тогда $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок разбиения $[x_{i-1}, x_i]$. В крайних точках этого отрезка существуют односторонние пределы, тогда по теореме 13.1 (а точнее, по ее следствию для односторонних пределов) $f(x)$ ограничена в некоторой ε-окрестности этих точек. $f(x)$ непрерывна на $[x_{i-1} + \varepsilon, x_i - \varepsilon]$, а значит по первой теореме Вейерштрасса она ограничена на нем. Т.е. $f(x)$ ограничена на $[x_{i-1}, x_{i-1} + \varepsilon)$, $[x_{i-1} + \varepsilon, x_i - \varepsilon]$ и $(x_i - \varepsilon, x_i]$, поэтому она ограничена на $[x_{i-1}, x_i]$.

Тогда по предыдущему следствию $f(x)$ интегрируема на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Но тогда она интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$. **[:|||||:]**

3 Свойства интегрируемых функций

3.1 Безымянное свойство

Теорема 39.5. *Если $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$ и $[a^*, b^*] \subset [a, b]$, то $f(x) \in \mathfrak{R}[a^*, b^*]$.*

Доказательство. Пусть τ^* — произвольное разбиение $[a^*, b^*]$. Дополним его произвольным образом до разбиения τ всего отрезка $[a, b]$. Тогда, очевидно, выполняется

$$\sum_{i^*=1}^{n^*} \omega_{i^*}(f)\Delta x_{i^*} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

[:|||||:]

Будем считать по определению, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

3.2 Аддитивность

Теорема 39.6. *Пусть $f(x) \in \mathfrak{R}[a, c]$ и $f(x) \in \mathfrak{R}[c, b]$. Тогда $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$, причем*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть τ — произвольное разбиение $[a, b]$, а $\tau_c = \tau \cup \{c\}$. Пусть τ_c' и τ_c'' — разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, соответствующие разбиению τ_c (т.е. составленные из тех же точек). Рассмотрим теперь $S_\tau(f)$, $S_{\tau_c'}(f)$ и $S_{\tau_c''}(f)$.

Точки ξ_i в $S_\tau(f)$ выберем произвольным образом, а в $S_{\tau_c'}(f)$ и $S_{\tau_c''}(f)$ выберем в качестве ξ соответствующие точки из $S_\tau(f)$. Теперь рассмотрим 2 случая.

- $c \in \tau$. В этом случае, очевидно, $S_\tau(f) = S_{\tau_c'}(f) + S_{\tau_c''}(f)$, что и требовалось доказать.

- $c \notin \tau$. Предположим, что $c \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$. Тогда

$$|S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f)| = |f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} - f(\xi'_{i_0})(c - x_{i_0-1}) - f(\xi''_{i_0})(x_{i_0} - c)| \leqslant \\ \leqslant |f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}| + |f(\xi'_{i_0})(c - x_{i_0-1})| + |f(\xi''_{i_0})(x_{i_0} - c)|.$$

  Для любого ξ выполняется $f(\xi) \leqslant M$, т.к. функция $f(x)$ ввиду интегрируемости на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ ограничена на них. Все слагаемые неотрицательны, значит можно раскрыть модули

$$|f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}| + |f(\xi'_{i_0})(c - x_{i_0-1})| + |f(\xi''_{i_0})(x_{i_0} - c)| \leqslant M\Delta x_{i_0} + M\Delta x_{i_0} = 2M\Delta x_{i_0} \leqslant 2Md_\tau = \varepsilon.$$

[:|||||:]

3.3 Линейность интеграла

Теорема 39.7. *Пусть* $f(x),\ g(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда* $(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) \in \mathfrak{R}[a, b]$, *причем*

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx \pm \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Доказательство.

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx = \lim_{d_\tau \to 0} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) \pm \beta g(\xi_i))\Delta x_i = \alpha \lim_{d_\tau \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \beta \lim_{d_\tau \to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \\ = \alpha \int_a^b f(x)\, dx \pm \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

[:|||||:]

3.4 Интегрируемость произведения

Теорема 39.8. *Если* $f(x),\, g(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$, *то* $(f(x) \cdot g(x)) \in \mathfrak{R}[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $f \cdot g$:

$$|\Delta(f \cdot g)| = |f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x + \Delta x)g(x)| = \\ = |f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + g(x)(f(x + \Delta x) - f(x))| = |f(x + \Delta x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)| \leqslant \\ \leqslant |f(x + \Delta x)| \cdot |\Delta g(x)| + |g(x)| \cdot |\Delta f(x)| \leqslant M|\Delta g(x)| + N|\Delta f(x)|.$$

Здесь, как и в теореме 39.6, мы воспользовались ограниченностью $f(x)$ и $g(x)$. Заметим, что $\omega_i(fg) = \sup|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = \sup|\Delta(fg)|$. Таким образом, $\omega_i(fg) \leqslant M\omega_i(g) + N\omega_i(f)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant M \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i + N \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

[:|||||:]

3.5 Неотрицательность определенного интеграла

Теорема 39.9. *Пусть* $f(x)$, $g(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$, *причем* $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) \leqslant g(x)$. *Тогда справедливо* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Идея доказательства аналогична таковой в теореме 39.7. Точно так же воспользуемся предельным переходом. **[:||||:]**

Следствие 39.10. *Если* $f(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$ *и* $f(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b]$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

3.6 Интегрируемость модуля

Теорема 39.11. *Если* $f(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$, *то и* $|f(x)| \in \mathfrak{R}[a,b]$, *причем*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $|f(\xi_i')| - |f(\xi_i'')| \leqslant |f(\xi_i') - f(\xi_i'')|$, т.е. $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$. Но тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Значит, $|f(x)| \in \mathfrak{R}[a,b]$. Также можно записать, что

$$|S_\tau(f,\xi_i)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i = S_\tau(|f|,\xi_i).$$

[:||||:]

Следует заметить, что ***обратное неверно!*** В качестве примера можно привести небольшую модификацию функции Дирихле

$$\widetilde{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Очевидно, что $|\widetilde{D}(x)| = 1$, т.е. $|\widetilde{D}(x)| \in \mathfrak{R}[a,b]$. Но при этом для любого отрезка $\widetilde{D}(x) \notin \mathfrak{R}[a,b]$.

3.7 Ну и еще два свойства

Теорема 39.12. *Пусть* $f(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$ *и* $f^*(x)$ *отлична от* $f(x)$ *в конечном числе* (N) *точек. Тогда* $f^*(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$, *причем*

$$\int\limits_a^b f^*(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - f^*(x)$. Требуется доказать, что $\varphi(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = 0$. Заметим, что $\varphi(x)$ ограничена (как разность ограниченных функций). Пусть $\forall x \in [a,b] \Rightarrow |\varphi(x)| \leqslant M$. Тогда

$$|S_\tau(\varphi,\xi_i)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)d_\tau\right| \leqslant Md_\tau \sum_{\substack{i=1\\ i=\overline{1,N}}}^{n} 1 \xrightarrow[d_\tau\to 0]{} 0.$$

[:|||||:]

Теорема 39.13. *Пусть* $f(x) \in \mathrm{C}[a,b]$ *и* $f(x) \geqslant 0$ *при* $x \in [a,b]$. *Пусть также* $\exists x_0 \in [a,b]$: $f(x_0) = d > 0$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

Доказательство. Если $f(x_0) = d > 0$, то в силу непрерывности функции $\exists \mathrm{U}(x_0) : \forall x \in \mathrm{U}(x_0) \Rightarrow f(x) > \frac{d}{2}$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]\setminus \mathrm{U}(x_0)} f(x)\,dx + \int\limits_{\mathrm{U}(x_0)} f(x)\,dx.$$

Левая часть этой суммы по следствию 39.10 не меньше 0. Правая часть же точно больше 0, т.к. $f(x) > \frac{d}{2} > 0$. Значит, и вся сумма больше 0. **[:|||||:]**

Часть 40

Определенный интеграл Римана III

1 Теоремы о среднем

1.1 Первая теорема о среднем

Теорема 40.1. *Пусть выполнены следующие условия:*[3]

1. $f(x)$ *и* $g(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$.
2. $g(x)$ *знакоопределена на* $[a,b]$.
3. $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b] \Rightarrow m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Тогда $\exists \mu \in [m,M]$: $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$. *Если дополнительно справедливо, что* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то* $\exists \xi \in [a,b] : \mu = f(\xi)$.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $g(x) \geqslant 0$. Тогда

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x)\cdot g(x) \leqslant M\cdot g(x),$$

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

[3] И снова спасибо Александре Корытовой за предоставленную лекцию.

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то подойдет любое μ из отрезка $[m, M]$. Пусть теперь $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$. Но тогда

$$m \leqslant \underbrace{\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}}_{\mu} \leqslant M.$$

Если $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$, то по теореме 14.2 она достигает свои точные грани m и M. Более того, в силу непрерывности она пробегает все промежуточные значения между m и M, т.е. $\exists \xi \in [a, b] : \mu = f(\xi)$. **[:|||||:]**

1.2 Вторая теорема о среднем

Теорема 40.2. *Пусть $f(x)$ и $g(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$, а $g(x)$ монотонна на $[a, b]$. Тогда $\exists \xi \in [a, b]$:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b-0)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

Если дополнительно выполнено, что $g(x) \geqslant 0$ и $g(x) \searrow$, то $\exists \xi_1 \in [a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int\limits_a^{\xi_1} f(x)\,dx.$$

А если $g(x) \geqslant 0$ и $g(x) \nearrow$, то $\exists \xi_2 \in [a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b-0)\int\limits_{\xi_2}^b f(x)\,dx.$$

Данные формулы принято называть *формулами Бонне*.

2 Связь между определенным и неопределенным интегралами

Пусть $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$. Тогда $\forall x \in [a, b]\ \exists F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, который принято называть **интегралом с переменным верхним пределом**.

Аналогично, $\forall x \in [a, b]\ \exists G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$, который называют **интегралом с переменным нижним пределом**. Впрочем, нас больше будет интересовать первый из них. Рассмотрим некоторые его свойства.

Теорема 40.3. *Если $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$, то $F(x) \in \mathrm{C}[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $F(x)$:

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

$f(x)$ интегрируема, значит она ограничена, т.е. $|f(x)| \leqslant M$. Но тогда

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \leqslant M \int\limits_x^{x+\Delta x} dt = M\Delta x \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0 \Rightarrow F(x) \in \mathrm{C}[a,b].$$

[:||||:]

Теорема 40.4. *Пусть $f(t) \in \Re[a,b]$ и $f(t) \in \mathrm{C}(x_0)$ (т.е. непрерывна в окрестности этой точки). Тогда $F(x)$ дифференцируема в x_0, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Доказательство. По определению $F'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$. Тогда рассмотрим разность

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x_0)\,dt.$$

Но тогда

$$\left|\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt < \left\{\begin{matrix} f(x) \in \mathrm{C}(x_0) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \\ \forall t, |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \end{matrix}\right\} <$$

$$< \frac{1}{\Delta x}\varepsilon \int\limits_x^{x+\Delta x} dt = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x_0) = F'(x_0).$$

[:||||:]

Теорема 40.5. *Пусть $f(t) \in \mathrm{C}[a,b]$. Тогда у этой функции существует первообразная $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, где x_0 — произвольная точка из отрезка $[a,b]$ (в зависимости от x_0 получаются разные первообразные, отличающиеся на константу).*

Доказательство.

- Если $x_0 < x$, то $F'(x) = f(x)$ по предыдущей теореме.
- Пусть теперь $x_0 > x$. Тогда $F(x) = -\int\limits_x^{x_0} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = -f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

[:||||:]

3 Основная формула интегрального исчисления

Наконец докажем ту теорему, ради которой и затевались все предыдущие.

Теорема 40.6 (*Формула Ньютона-Лейбница*). *Пусть* $f(x) \in \mathrm{C}[a,b]$*, а* $\Phi(x)$ *— первообразная функции* $f(x)$ *на* $[a,b]$*. Тогда*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)} = \Phi(x)\big|_a^b.$$

Доказательство. По предыдущей теореме $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C$. Но тогда $F(a) = 0$, значит $C = -\Phi(a)$. С другой стороны, $F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a)$. **[:||||:]**

Благодаря этой теореме можно вычислять определенные интегралы практически так же, как и неопределенные, что и демонстрируют две следующие теоремы.

4 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 40.7. *Пусть* $\varphi\colon [\alpha,\beta] \mapsto [c,d] \supset [a,b]$*,* $a = \varphi(\alpha)$ *и* $b = \varphi(\beta)$*, а функция* φ *непрерывно дифференцируема на* $[\alpha,\beta]$*, а* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[c,d]$*. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array}\right\} = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть Φ — первообразная функции f на отрезке $[a,b]$. Тогда $\Phi(\varphi)$ — первообразная функции $f(\varphi)\varphi'$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, т.к.

$$(\Phi(\varphi))'(t) = \Phi'(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Здесь производные при $t = \alpha$, β понимаются как односторонние. Дважды воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница, получаем (при любом расположении a и b):

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ и } \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

[:||||:]

5 Интегрирование по частям

Теорема 40.8. *Пусть* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a,b]$*. Тогда справедлива формула:*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Доказательство. Запишем $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$. Теперь проинтегрируем это равенство:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int\limits_a^b (u(x)v(x))'\,dx - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

[:|||||:]

Часть 41

Несобственные интегралы

До этого момента мы рассматривали функции, интегрируемые на конечном отрезке $[a, b]$. Более того, необходимым условием интегрируемости являлась ограниченность функции на данном отрезке. Сейчас же мы несколько расширим понятие интеграла, рассмотрев случаи бесконечного отрезка интегрирования и неограниченных функций.

1 Несобственные интегралы I рода

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема по Риману (в собственном смысле, т.е. в том смысле, как мы это понимали раньше) на отрезке $[a, B]$ для любого B. Тогда предел

$$\lim_{B \to +\infty} \int\limits_a^B f(x)\,dx \tag{1}$$

называется **несобственным интегралом I рода** от функции f по лучу $[a, +\infty)$ и обозначается как $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если предел (1) существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся** (обозначается как $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$), а функция $f(x)$ называется интегрируемой в несобственном смысле по $[a, +\infty)$. Если же предел (1) не существует или равен ∞, то данный несобственный интеграл называется **расходящимся** (что записывается как $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \nrightarrow$).

Теперь обобщим это определение на случай $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Это можно сделать следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B' \to +\infty} \int\limits_{-B'}^{0} f(x)\,dx + \lim_{B \to +\infty} \int\limits_{0}^{B} f(x)\,dx = \lim_{\substack{B' \to +\infty \\ B \to +\infty}} \int\limits_{-B'}^{B} f(x)\,dx.$$

Очень важно, что используется именно двойной предел, т.е. не полагается $B = B'$. Отличия между этими двумя способами определения будут проиллюстрированы ниже.

2 Несобственные интегралы II рода

Предположим, что функция f не ограничена в точке b, т.е. $\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0 : \forall x \in (b-\delta, b) \Rightarrow |f(x)| \geqslant M$. Предположим также, что f определена на $[a, b)$ и интегрируема в собственном смысле на $[a, b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{2}$$

называется **несобственным интегралом II рода** от $f(x)$ по $[a, b]$. Используется уже привычное обозначение: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если предел (2) существует, то данный несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует или равен ∞, то *расходящимся*. Для указания этих фактов используются те же обозначения, что и для несобственных интегралов I рода. Рассмотрим пару примеров.

- $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Очевидно, что эта функция не интегрируема в собственном смысле на данном отрезке, т.к. функция не ограничена в 0. Тогда рассмотрим несобственный интеграл II рода:
$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2.$$

- $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$. Здесь похожий случай, но несобственный интеграл получается расходящимся:
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = +\infty.$$

Предположим теперь, что $f(x)$ не ограничена в точке $c \in (a, b)$. Мы по-прежнему хотим проинтегрировать ее на отрезке $[a, b]$. Соответствующий несобственный интеграл можно определить тем же образом, каким мы определяли несобственный интеграл I рода для всей числовой прямой. Иными словами, разбиением на 2 части:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0+0 \\ \varepsilon' \to 0+0}} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx \right).$$

Точка c, в которой функция не ограничена, называется **особой**. Если у несобственного интеграла есть несколько особых точек, то исследование сходимости проводится в каждой из точек, причем интеграл считается сходящимся, если он сходится в каждой из этих точек.

3 Сходимость в смысле главного значения

Рассмотрим следующий несобственный интеграл I рода:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = -\lim_{\substack{A \to +\infty \\ A' \to +\infty}} \cos x\big|_{-A'}^{A}.$$

Данный предел не существует. Теперь же попробуем взять обычный одинарный предел (о чем говорилось в определении несобственного интеграла):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx = -\lim_{A\to+\infty} \cos x\Big|_{-A}^{A} = 0,$$

т.к. $\cos x$ — четная функция. Будем говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ **сходится в смысле главного значения**, если существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx$. Чтобы обозначать сходимость в смысле главного значения используется запись $v.p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Теперь рассмотрим несобственные интегралы II рода. Предположим, что функция f не ограничена в точке $c \in (a, b)$. Тогда под несобственным интегралом $v.p \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ понимается

$$\lim_{\varepsilon\to0+0} \left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx \right).$$

Например,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to0+0\\ \varepsilon'\to0+0}} \left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon'} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1} \right) \text{ — не существует,}$$

$$v.p \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1} \right) = \lim_{\varepsilon\to0+0} (\ln\varepsilon - \ln\varepsilon) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что если несобственный интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения. Обратное же, вообще говоря, неверно.

Наконец, рассмотрим переход от несобственного интеграла II рода к несобственному интегралу I рода. Предположим, что f не ограничена в точке b. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \dfrac{1}{b-x} \\ x = b - \dfrac{1}{t} \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t^2} \end{array} \right\} = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\, dt.$$

Таким образом, с этого момента мы будем рассматривать только несобственные интегралы I рода, т.к. в случае необходимости сделать нужный переход не составит труда.

4 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов I рода

Теорема 41.1.

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx \to \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists A_0 > a : \forall A_1, A_2 \geqslant A_0 \Rightarrow \left| \int\limits_{a}^{A_1} f(x)\, dx - \int\limits_{a}^{A_2} f(x)\, dx \right| = \left| \int\limits_{A_2}^{A_1} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$. По критерию Коши для числовых функций ее предел при $A \to +\infty$ (т.е. величина $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$) существует тогда и только тогда, когда выполнено

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 > a : \forall A_1, A_2 \geqslant A_0 \Rightarrow |F(A_1) - F(A_2)| < \varepsilon.$$

А это именно то, что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Теорема 41.2 (*Признак сходимости несобственных интегралов*). *Пусть $f(x) \geqslant 0$ на $[a, +\infty)$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$ т.и.т.т., когда функция $F(B) = \int\limits_a^B f(x)\,dx$ ограничена.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  $$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to \Rightarrow \int\limits_a^B f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

  Т.е. данный несобственный интеграл сходится.

- ***Достаточность.***

  Заметим, что $f(x) \geqslant 0$, значит $F(B) \nearrow$. Но тогда для ее сходимости достаточно ограниченности.

[:|||||:]

Часть 42

Признаки сравнения несобственных интегралов

1 Простейшие признаки сравнения

Теорема 42.1. *Пусть $\forall x \in [a, +\infty) \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда:*

1. *Если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$.*
2. *Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \nrightarrow$, то и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \nrightarrow$.*

Доказательство.

1. По теореме 41.2 $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \leqslant M$. Тем самым мы ограничили $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, значит этот интеграл сходится.

2. Предположим, что $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \to$. Тогда по пункту 1 сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Получили противоречие.

[:|||||:]

Будем говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится **абсолютно**, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Это принято обозначать как $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \xrightarrow{\text{абс}}$.

Теорема 42.2 (***Первый признак сравнения (признак абсолютной сходимости)***). *Пусть* $\forall x \in [a,+\infty) \Rightarrow |f(x)| \leqslant g(x)$. *Тогда если* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \to$, *то и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$.

Доказательство. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Тогда по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B > a : \forall A_1 > B,\ A_2 > B \Rightarrow \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx \leqslant \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

А это и означает, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$. **[:|||||:]**

Теорема 42.3 (***Второй признак сравнения***). *Пусть* $f(x),\ g(x) \geqslant 0$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$. *Тогда*

1. *Если* $0 < k < +\infty$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to \Leftrightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \to$.

2. *Если* $k = 0$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \to \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$.

3. *Если* $k = +\infty$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \nrightarrow \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \nrightarrow$.

Доказательство.

1. Из условия следует, что $\frac{f(x)}{g(x)} = k + \bar{o}(1)$, т.е. $f(x) = (k + \bar{o}(1))g(x)$. По определению $\bar{o}(1)$ можно предъявить такое b, что $\forall x \geqslant b \Rightarrow |\bar{o}(1)| \leqslant \frac{k}{2}$. Тогда
$$\frac{k}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3k}{2}g(x).$$

   По теореме 42.1 левая часть неравенства дает, что при сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$. А правая часть неравенства дает, что при расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

2. Можно записать, что $f(x) = \bar{o}(1)g(x)$. Аналогично, можно ограничить сверху $\bar{o}(1)$ некоторой константой. Тогда $f(x) \leqslant cg(x)$. Но тогда, используя теорему 42.1, получаем то, что и требовалось доказать.

3. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, то $g(x) = \bar{o}(1)f(x) \leqslant cf(x)$. Снова используем теорему 42.1.

[:||||:]

Данные признаки опираются на тот факт, что у нас уже есть некоторый интеграл, про который известно, сходится он или нет. Поэтому найдем следующий несобственный интеграл I рода для того, чтобы было на что «опереться» при использовании данных признаков:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \ln A, & \alpha = 1 \\ \frac{A^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \alpha = 1, \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Иными словами, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \to$, если $\alpha > 1$. В следующей теореме используется обозначение O^*. Запись $f(x) = \mathrm{O}^*(g(x))$, $x \to a$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k < \infty$, причем $k \neq 0$. Т.е. это частный случай $\underline{\mathrm{O}}$, которое говорит, что данное отношение функций ограничено.

Следствие 42.4. *Пусть $f(x) = \mathrm{O}^*\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ при $x \to +\infty$. Тогда при $\alpha > 1$, $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ расходится.*

Например, если требуется просто исследовать интеграл на сходимость, то необязательно считать его «честно». Пусть необходимо исследовать на сходимость следующий интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^5 + 7x^4 - 3x^2 + 2}{4x^7 + 3x^6 + 2x^2 + 17}\,dx.$$

Непосредственное нахождение первообразной подынтегральной функции достаточно трудоемко. Однако можно записать:

$$\frac{x^5 + 7x^4 - 3x^2 + 2}{4x^7 + 3x^6 + 2x^2 + 17} = \mathrm{O}^*\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \to +\infty.$$

А значит, по предыдущему следствию данный интеграл сходится. Заметим также, что в качестве нижнего предела в данном интеграле может выступать любое число $a > 1$.

Для несобственных интегралов II рода можно получить практически аналогичный результат:

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int\limits_\varepsilon^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \begin{cases} -\ln \varepsilon, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Следствие 42.5. *Пусть $f(x) = \mathrm{O}^*\left(\frac{1}{(x-a)^\alpha}\right)$ при $x \to a+0$, и $f(x)$ интегрируема на $(a, b]$. Тогда если $\alpha < 1$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а если $\alpha \geqslant 1$, то данный интеграл расходится.*

Комбинируя последние признаки, можно исследовать на сходимость интегралы наподобие этого:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}.$$

При $x \to +\infty$, $f(x) = \mathrm{O}^*\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. $\frac{3}{2} > 1$, поэтому в данном случае имеем сходимость. При $x \to 0+0$, $f(x) = \mathrm{O}^*\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$. $\frac{1}{2} < 1$, значит и в этом случае имеем сходимость. Тогда и вся интегральная сумма сходится.

2 Абсолютная и условная сходимость

Здесь нам понадобится вспомнить первый признак сравнения (теорема 42.2).

Например, сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ может быть совсем неочевидна. Однако, вспомнив, что $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, сходимость становится очевидной.

Следствие 42.6.

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \to \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \to .$$

Доказательство. Напрямую следует из первого признака сравнения и $|f(x)| \leqslant |f(x)|$. **[:||||:]**

Исходя из того, что из $|f(x)|$, $f(x)$ сходится/расходится, принято выделять следующие виды сходимости:

- Если и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходятся, то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится **абсолютно (качественно)**.
- Если и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходятся, то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.
- Если же $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится **условно (некачественно)**.

3 Признак Дирихле

Теорема 42.7. *Рассмотрим* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. *Пусть выполнено:*

1. *Следующие 3 условия по сути эквивалентны:*
   (a) *Первообразная функции $f(x)$ ограничена, т.е. $|F(x)| \leqslant k$.*
   (b) $\forall x \geqslant a \Rightarrow \int\limits_a^{x} f(t)\,dt \leqslant k$ *(обобщение предыдущего условия).*
   (c) $\forall x', x'' \geqslant a \Rightarrow \left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leqslant k.$

2. $\forall x \in [a, +\infty) \Rightarrow g(x) \geqslant 0$.

3. $\forall a_1, a_2 \geqslant a \Rightarrow g(x) \in \mathfrak{R}[a_1, a_2]$.

4. $g(x)$ *монотонна.*

5. $g(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *сходится абсолютно или условно.*

Доказательство. Из сходимости $g(x) \to 0$ следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) > a : \forall A_1, A_2 > A \Rightarrow |g(A_1)|,\ |g(A_2)| < \frac{\varepsilon}{2k}$.

Тогда по второй теореме о среднем и, исходя из 1-ого условия теоремы, можно записать

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|g(A_1)\int\limits_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(A_2)\int\limits_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}\cdot k + \frac{\varepsilon}{2k}\cdot k = \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$. При $\alpha > 1$, $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$, т.е. сходимость абсолютная. Пусть теперь $0 < \alpha \leqslant 1$. Обозначим $f(x) = \sin x$, тогда $F(x) = -\cos x$ ограничена. $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \searrow$ и $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится (неизвестно пока, абсолютно или условно). Чтобы определить тип сходимости, исследуем модуль подынтегральной функции:

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} = \underbrace{\frac{1}{2x^\alpha}}_{\text{расх.}} - \underbrace{\frac{\cos 2x}{2x^\alpha}}_{\text{сх.}}.$$

Значит, сходимость условная.

4 Признак Абеля

Теорема 42.8. *Пусть* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится (абсолютно или условно), а* $g(x)$ *монотонна и ограничена на* $[a, +\infty)$. *Тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *сходится (абсолютно или условно).*

Доказательство. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) : \forall A_1, A_2 > A \Rightarrow \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Ограничим $|g(x)| \leqslant k$. Теперь применим вторую теорему о среднем:

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|g(A_1)\int\limits_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(A_2)\int\limits_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leqslant 2k\varepsilon < \varepsilon'.$$

[:|||||:]

Смысл этого признака в том, что если мы домножим подынтегральную функцию на что-то, похожее на константу, то интеграл этого произведения по-прежнему будет сходиться.

Прежде чем пойти дальше, стоит взглянуть на следующий пример. Исследуем на сходимость интеграл от функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{Q}, \\ -\frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Для любого $a > 0$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится. Тогда по следствию 42.6 должен сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Однако это не так. Дело в том, что данная функция не интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$. А значит, определить $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ вообще нельзя. Поэтому важно помнить, как именно определяется несобственный интеграл, чтобы не допустить ошибки.

Часть 43
Приложения интегрального исчисления к вычислению площадей

1 Многоугольные фигуры

Будем называть **многоугольной фигурой** объединение конечного числа многоугольников. Понятие многоугольной фигуры, таким образом, допускает несвязность этой фигуры (например, два отдельных многоугольника). **Плоской** фигурой будем называть ограниченное множество точек на плоскости (т.е. все эти точки можно поместить внутрь какого-то круга).

Обозначим **площадь** многоугольной фигуры P как $S(P)$. Мы будем считать по определению, что $S(P) \geqslant 0$.

Многоугольные фигуры P и Q называются **равными**, если существует взаимно однозначное отображение, сохраняющее расстояние между точками, переводящее P в Q. Иными словами, эти две фигуры совпадают при наложении друг на друга.

1.1 Свойства площади

1. ***Инвариантность.*** Равные фигуры имеют равные площади.

2. ***Аддитивность.*** Если многоугольные фигуры P и Q не имеют общих внутренних точек, то $S(P \cup Q) = S(P) + S(Q)$.

3. ***Существование единицы.*** Площадь квадрата со стороной единичной длины равна единице площади.

2 Квадрируемость фигуры

Рассмотрим F — произвольную плоскую фигуру. Пусть P — произвольная многоугольная фигура, лежащая внутри F, а Q — некоторая многоугольная фигура, содержащая в себе F.

Тогда выполняется

$$S(P) \leqslant S(F) \leqslant S(Q).$$

Множество $\{S(P)\}$ ограничено сверху (например, любой $S(Q)$), значит $\exists \sup\limits_{P \subset F}\{S(P)\} = \underline{S}$. Эту величину назовем **нижней площадью**. Аналогично, множество $\{S(Q)\}$ ограничено снизу (например, нулем), а значит $\exists \inf\limits_{Q \supset F}\{S(Q)\} = \overline{S}$. Эту величину назовем **верхней площадью**.

Проще говоря, мы оцениваем площадь данной фигуры F с помощью описанной и вписанной многоугольных фигур, площади которых мы легко можем находить.

Плоская фигура F называется **квадрируемой (имеющей площадь)**, если $\overline{S} = \underline{S} = S$. За площадь F мы и примем это S. Площадь плоской фигуры удовлетворяет тем же свойствам, что и площадь многоугольной фигуры. Однако с некоторыми выводами стоит быть осторожнее. Например, можно обобщить свойство аддитивности на конечное число фигур. Если $P_1, \dots, P_n$ — квадрируемые фигуры, не имеющие общих внутренних точек, то

$$S\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} S(P_i).$$

Но, вообще говоря, это свойство не выполняется для счетного числа фигур. Но перед тем как привести контрпример, введем еще одно понятие. Будем говорить, что F имеет **нулевую площадь**, если F может быть вписано в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади.

Теперь рассмотрим множество $F = Q_{[0,1]\times[0,1]}$ — все точки, имеющие рациональные координаты в единичном квадрате. Поскольку у каждой точки нулевая площадь, то $\underline{S} = 0$. С другой стороны, в любой окрестности любой точки этого квадрата есть точки с рациональными координатами, а значит, чтобы их все покрыть, нужно взять весь квадрат целиком. Т.е. $\overline{S} = 1$. А значит, F не является квадрируемой.

3 Критерии квадрируемости

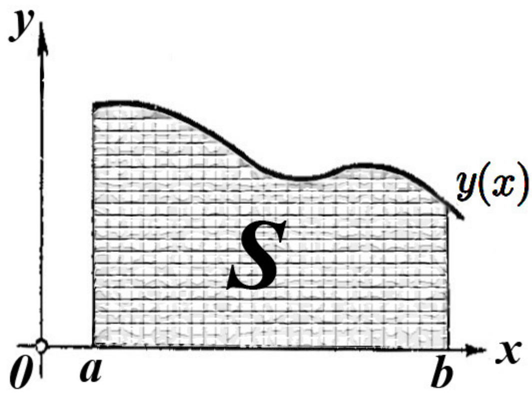
Здесь читателю предлагается вспомнить понятие границы множества (стр. 78).

Теорема 43.1 (***Критерий I***). *F квадрируема т.и.т.т., когда ее граница имеет нулевую площадь.*

Теорема 43.2 (***Критерий II***). *F квадрируема т.и.т.т., когда существуют последовательности квадрируемых фигур $\{A_n\}, \{B_n\}$, такие что $F \supset A_n$ и $F \subset B_n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} S(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(B_n)$.*

4 Криволинейная трапеция

Познакомимся теперь с важным классом квадрируемых фигур. Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию $f(x)$, такую что $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \geqslant 0$. Тогда **криволинейной трапецией** называется фигура $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Пример такой фигуры проиллюстрирован на рисунке справа.



Теорема 43.3. *Криволинейная трапеция F является квадрируемой фигурой с площадью*

$$S(F) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Для начала отметим, что раз $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она и интегрируема на нем. Рассмотрим теперь $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$.

Пусть $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, а $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Теперь определим следующие фигуры:

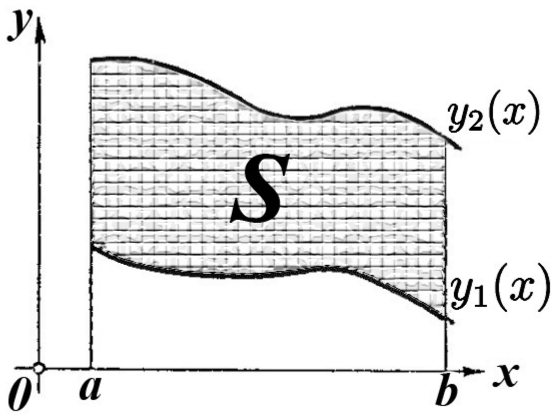
$$P^* = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i],$$

$$P_* = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i].$$

Таким образом, P_* лежит внутри этой трапеции, а P^* покрывает ее. По определению этих фигур $S(P_*) \leqslant S(F) \leqslant S(P^*)$. Но теперь заметим, что $S(P_*) = \sum\limits_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ — не что иное, как нижняя сумма Дарбу, а $S(P^*) = \sum\limits_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ — верхняя сумма Дарбу. Но тогда, вспоминая один из критериев интегрируемости по Риману (стр. 119), получаем то, что и требовалось доказать. [:||||:]

Следствие 43.4. *Если функция $f(x)$ является отрицательной, то ее площадь, лежащая под осью абсцисс, берется с противоположным знаком.*

Следствие 43.5. *Если $F = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$, то $S(F) = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$.*



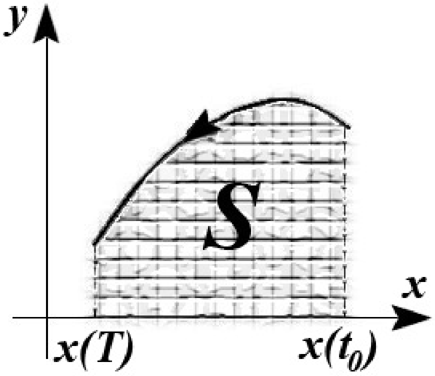
Наконец, рассмотрим фигуру $G = \{(x,y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ 0 \leqslant x \leqslant g(y)\}$. Ее площадь считается аналогично, только теперь мы берем интеграл по y: $S(G) = \int\limits_c^d g(y)\,dy$.

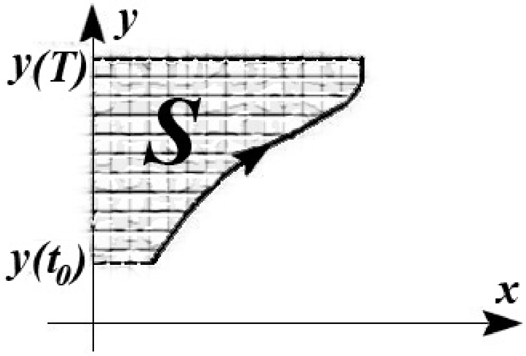
5 Параметрически заданная кривая

Рассмотрим теперь фигуру, заданную функцией $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t \in [t_0, T]$, а $x(t)$, $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[t_0, T]$ функции.

Назовем **положительным обходом** такой обход кривой, при котором рассматриваемая область остается слева (на рисунках ниже показан именно этот порядок). Порядок обхода очень важен для корректного перехода от представленных выше простых формул к параметрическим.

Но пока рассмотрим незамкнутую кривую. В этом случае можно считать площадь фигуры, «двигаясь» как по Ox, так и по Oy.





Можно записать

$$dx = x'(t)\,dt \qquad a = x(T) \qquad b = x(t_0),$$
$$dy = y'(t)\,dt \qquad c = y(t_0) \qquad d = y(T).$$

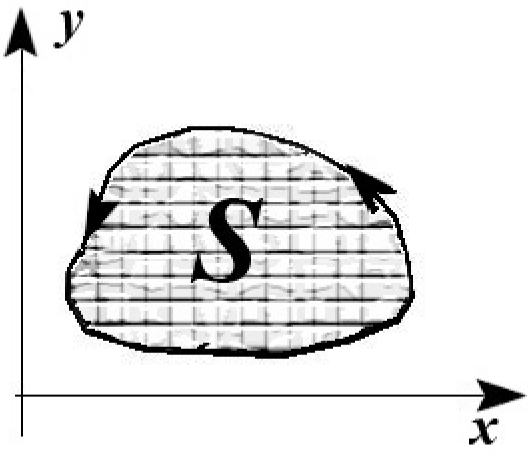
Тогда получаем две практически эквивалентные формулы:

$$S(F) = -\int\limits_{t_0}^{T} y(t)x'(t)\,dt,$$
$$S(F) = \int\limits_{t_0}^{T} x(t)y'(t)\,dt.$$

Если же F замкнута (проиллюстрировано ниже), то

$$S(F) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} (x(t))^2\,d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right).$$

Впрочем, все три формулы можно применять как для замкнутых, так и для незамкнутых кривых. Несмотря на то, что последняя формула является простой композицией первых двух, применять ее иногда удобнее. Например, для кривой, заданной как $x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t$.

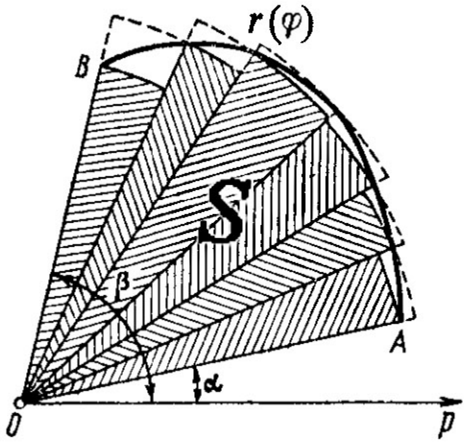


6 Площадь фигуры в полярной системе координат

Научимся находить площадь фигуры $F = \{(r, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),\ \alpha < \varphi < \beta\}$, т.е. заданной в полярной системе координат. Здесь $r(\varphi)$ — непрерывная функция.

Рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta$. Определим следующие величины:

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} r(\varphi), \\
M_i &= \sup_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} r(\varphi), \\
F_* &= \bigcup_{i=1}^{n} \{(r, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant m_i,\ \varphi_{i-1} < \varphi < \varphi_i\}, \\
F^* &= \bigcup_{i=1}^{n} \{(r, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant M_i,\ \varphi_{i-1} < \varphi < \varphi_i\}.
\end{aligned}$$



Геометрический смысл этих величин продемонстрирован на рисунке: m_i — это сектор, который целиком содержится внутри данного участка под кривой, а M_i — сектор, покрывающий этот участок. А фигуры F_* и F^* соответственно построены из этих секторов. Тогда выполняется $S(F_*) \leqslant S(F) \leqslant S(F^*)$. Но

$$\begin{aligned}
S(F_*) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i, \\
S(F^*) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i.
\end{aligned}$$

А это не что иное, как нижняя и верхняя суммы Дарбу. А значит при диаметре разбиения, стремящемся к 0, данные суммы сходятся к одному и тому же числу: $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi$. Значит,

$$S(F) = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Часть 44

Вычисление длины дуги кривой и объема тела вращения

1 Понятие кривой на плоскости и в пространстве

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана прямоугольная декартова система координат. Множество точек $\Gamma = \{(x(t); y(t); z(t)) \mid t \in [a, b]\}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции, называется **непрерывной кривой (кривой Жордана)**. Для удобства будем обозначать $\bar{r}(t)$ радиус-вектор с координатами $(x(t); y(t); z(t))$, а $\hat{r}(t)$ точку с координатами $(x(t); y(t); z(t))$. Тогда можно записать $\Gamma = \{\hat{r}(t) \mid t \in [a, b]\}$.

Точка M кривой Γ называется **точкой самопересечения (кратной)**, если $\exists t_1 \neq t_2 : \hat{r}(t_1) = \hat{r}(t_2) = M$. Кривую, у которой нет кратных точек, назовем **простой**. Если $\hat{r}(a) = \hat{r}(b)$, то кривая называется **замкнутой (контуром)**.

Кривая $\Gamma = \{\hat{r}(t) \mid t \in [a, b]\}$ называется *дифференцируемой (непрерывно дифференцируемой)*, если дифференцируема (непрерывно дифференцируема) $\bar{r}(t)$. **Ориентация кривой**, отвечающая увеличению параметра t, называется положительной, в противном случае — отрицательной.

Рассмотрим некоторое разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Соединим точки $\hat{r}(t_{i-1})$ и $\hat{r}(t_i)$ отрезками прямой. В результате получим ломаную Λ_Γ. При этом выполняется $S_{\Lambda_\Gamma} = \sum\limits_{i=1}^{n} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|$. Здесь S_{Λ_Γ} обозначает длину. Это обозначение (S) будем использовать и в дальнейшем.

Назовем кривую Γ **спрямляемой (имеющей длину)**, если $\exists \sup\limits_{\tau} S_{\Lambda_\Gamma} = S_\Gamma < \infty$. Что говорится в этом определении? Увеличивая число отрезков, которыми соединяются точки на кривой, мы точнее можем посчитать длину данной кривой. Устремляя диаметр разбиения к 0, мы фактически покрываем кривую бесконечным количеством маленьких отрезочков. Если это удалось сделать, значит длину кривой можно посчитать, и она как раз равна сумме длин этих отрезочков.

Лемма 44.1 (***Аналог теоремы Лагранжа для вектор-функции***)**.** *Пусть вектор-функция $\bar{r} = \bar{r}(t)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда $\exists \xi \in (a, b)$:*

$$|\bar{r}(b) - \bar{r}(a)| \leqslant |\bar{r}'(\xi)|(b - a).$$

Доказательство. Если $\bar{r}(a) = \bar{r}(b)$, то все доказано. Если $\bar{r}(a) \neq \bar{r}(b)$, то положим

$$\bar{e} = \frac{\bar{r}(b) - \bar{r}(a)}{|\bar{r}(b) - \bar{r}(a)|}.$$

Получаем, что $|\bar{e}| = 1$. Тогда

$$|\bar{r}(b) - \bar{r}(a)| = (\bar{r}(b) - \bar{r}(a), \bar{e}) = (\bar{r}(b), \bar{e}) - (\bar{r}(a), \bar{e}).$$

Введем функцию одного переменного $f(t) = (\bar{r}(t), \bar{e})$, для которой выполнены все условия теоремы Лагранжа. Следовательно, $\exists \xi \in (a, b)$ такое, что:

$$|\bar{r}(b) - \bar{r}(a)| = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) = (\bar{r}'(\xi), \bar{e})(b - a) \leqslant |\bar{r}'(\xi)|(b - a).$$

Последний переход сделан, используя неравенство Коши-Буняковского и тот факт, что $|\bar{e}| = 1$. **[:||||:]**

Теорема 44.2. *Если кривая* Γ *непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и* $|\bar{r}(a) - \bar{r}(b)| \leqslant S_\Gamma \leqslant \max\limits_{[a,b]} |\bar{r}'(t)|(b-a)$.

Доказательство. Можно записать (первый переход выполнен в соответствии с неравенством треугольника):

$$|\bar{r}(a) - \bar{r}(b)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})| \leqslant \sup_\tau S_{\Lambda_\Gamma} = \sup_\tau \sum_{i=1}^{n} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|.$$

По лемме 44.1

$$\sup_\tau \sum_{i=1}^{n} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})| = \sup_\tau \sum_{i=1}^{n} |\bar{r}'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})| \leqslant \max_{[a,b]} |\bar{r}'(t)|(b-a).$$

[:|||||:]

2 Длина дуги кривой

Назовем точку кривой Γ, отвечающую значению параметра t_0, **особой**, если $\bar{r}'(t_0) = 0$ или $\nexists \bar{r}'(t_0)$. Непрерывно дифференцируемую кривую без особых точек будем называть **гладкой**. Определим также Γ_t — дугу кривой $\Gamma = \{\hat{r}(u) \mid a \leqslant u \leqslant t\}$ и $S(t)$ — длину дуги Γ_t, отсчитываемую от $t = a$.

Теорема 44.3. *Для гладкой кривой* Γ *функция* $S(t)$ *является монотонно возрастающей, причем*

$$\frac{dS}{dt} = \left|\frac{dr(t)}{dt}\right| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим дугу кривой, отвечающую параметру $t \in (t_0, t_0 + \Delta t)$:

$$|\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)| \leqslant \Delta S(t_0) \leqslant \max_{[t_0, t_0+\Delta t]} |\bar{r}'(t)|\Delta t,$$

$$\frac{|\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)|}{\Delta t} \leqslant \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} \leqslant \max_{[t_0, t_0+\Delta t]} |\bar{r}'(t)|.$$

Теперь перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\left|\frac{dr(t_0)}{dt}\right| \leqslant \frac{dS(t_0)}{dt} \leqslant |\bar{r}'(t_0)|.$$

Но тогда $S'_+(t_0) = |\bar{r}'(t_0)|$ (т.к. $\Delta t > 0$) и, аналогично, $S'_-(t_0) = |\bar{r}'(t_0)|$. Тогда $S'(t_0) = |\bar{r}'(t_0)| > 0$, т.к. кривая Γ не имеет особых точек. А это и значит, что $S(t) \uparrow$. **[:|||||:]**

Чтобы понять, зачем нужна данная теорема, сделаем хитрый ход. Нам нужно вычислить длину дуги кривой на отрезке $[a, b]$, т.е. найти $S(b)$. Можно записать $S(b) = S(b) - 0 = S(b) - S(a) = \int\limits_a^b S'(t)\,dt$. А вот теперь можно воспользоваться только что доказанной теоремой:

$$S(b) = \int_a^b S'(t)\,dt = \int_a^b (\bar{r}'(t))\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

В более простом случае, когда кривая задана как функция $y = f(x)$, и нужно найти длину дуги при $a \leqslant x \leqslant b$, можно воспользоваться следующей параметризацией:

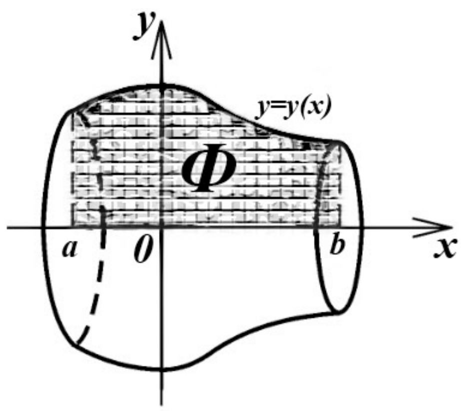
$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow S = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Наконец, полезно знать формулу для расчета длины дуги, заданной в полярных координатах. Пусть кривая C задана уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, где $r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция. Тогда длина соответствующего участка кривой равна

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

3 Объем тела вращения

Рассмотрим непрерывную и неотрицательную на $[a, b]$ функцию $y = f(x)$. Давайте посчитаем объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, которую задает эта функция, вокруг оси Ox, как показано на рисунке.



Возьмем произвольное разбиение τ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ и введем следующие величины:

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$\Omega_* = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times \{y^2 + z^2 \leqslant m_i^2\},$$
$$\Omega^* = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times \{y^2 + z^2 \leqslant M_i^2\}.$$

Чтобы посчитать объем тела, мы действуем так же, как действовали при вычислении площади фигуры под графиком. Мы разбиваем данную фигуру на много-много цилиндров (неравенство $y^2 + z^2 \leqslant r^2$ задает круг радиуса r вокруг Ox при фиксированном x). Затем ограничиваем одним объединением цилиндров (Ω^*) фигуру сверху, а другим (Ω_*) снизу, т.е. выполняется $V(\Omega_*) \leqslant V \leqslant V(\Omega^*)$. Если теперь устремить диаметр разбиения к 0, то объемы обеих фигур сойдутся к искомому объему. А объем цилиндра мы легко можем находить:

$$V(\Omega_*) = \sum_{i=1}^n \pi m_i^2 \Delta x_i,$$
$$V(\Omega^*) = \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 \Delta x_i.$$

Фактически записаны нижняя и верхняя суммы Дарбу. Но тогда

$$\lim_{d_\tau \to 0} V(\Omega_*) = \lim_{d_\tau \to 0} V(\Omega^*) = V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)\, dx.$$

Часть 45
Знакопостоянные числовые ряды

1 Определения

Рассмотрим произвольную числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots \in \mathbb{R}$ и определим следующий символ:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{1}$$

Введем также еще 2 обозначения:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ — } n\text{-ая частичная сумма,}$$
$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \text{ — } n\text{-ый остаток.}$$

Числовую последовательность $\{a_n\}$, рассматриваемую вкупе с последовательностью ее частичных сумм $\{S_n\}$, будем называть **числовым рядом** и обозначать с помощью символа (1). Числовой ряд назовем **сходящимся**, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S < \infty$. Число S будем называть **суммой** этого ряда. В противном случае (если предела не существует или он не равен конечному числу) числовой ряд называется **расходящимся**.

Стоит отметить, что теория числовых рядов в некотором роде объединяет в себе теорию числовых последовательностей и несобственных интегралов. Из последней мы возьмем, кстати, следующие обозначения для сходимости/расходимости ряда. Сходящийся ряд будем обозначать как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \to$, а расходящийся как $\sum a_k \nrightarrow$ (пределы у значка суммы можно опускать в обоих случаях).

2 Сходимость и расходимость числовых рядов

Основной задачей теории числовых рядов является исследование этих самых рядов на сходимость и расходимость. Мы сформулируем множество признаков, как это было при изучении несобственных интегралов. Поэтому, в частности, нас зачастую не будет волновать последовательность $\{a_n\}$, порождающая исследуемый числовой ряд, ведь одной $\{S_n\}$ достаточно для восстановления $\{a_n\}$: $a_1 = S_1$, $a_2 = S_2 - S_1, \ldots, a_n = S_n - S_{n-1}$.

Утверждение 45.1. *Отбрасывание конечного числа членов числового ряда не влияет на его сходимость/расходимость.*

Доказательство. Действительно, в этом случае мы просто уменьшим всю последовательность частичных сумм, начиная с некоторого номера, на константу, что не влияет на существование предела. **[:|||||:]**

Утверждение 45.2. *Домножение числового ряда на константу $C \neq 0$ не влияет на его сходимость/расходимость.*

Доказательство. Аналогично, в этом случае вся последовательность частичных сумм домножится на C. **[:|||||:]**

Рассмотрим теперь пару примеров числовых рядов:

- Классическим примером может служить хорошо знакомая *геометрическая прогрессия*:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Сразу рассмотрим случай $q = 1$. Тогда имеем, что $S_n = n$, а $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд в этом случае расходится. Вспомним теперь, что при $q \neq 1 \Rightarrow S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Если $|q| < 1$, то имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} = S \Rightarrow \sum q^n \to .$$

А при $|q| > 1$ данный предел равен бесконечности, поэтому ряд расходится.

- Теперь рассмотрим чуть более сложный пример:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Это очень напоминает разложение в ряд Тейлора экспоненты:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x) = S_{n-1} + R_n(x) \Rightarrow S_{n-1} = e^x - R_n(x).$$

Теперь, учитывая тот факт, что в этом разложении Тейлора $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при $x \in \mathbb{R}$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = e^x.$$

Тем самым мы нашли сумму ряда и доказали, что он сходится при любом x.

3 Критерий Коши

Теорема 45.3. *Числовой ряд сходится т.и.т.т., когда он удовлетворяет* ***условию Коши****:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Заметим, что $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k = S_{n+p} - S_n$. Но в таком виде мы получаем в точности критерий Коши сходимости числовой последовательности $\{S_n\}$, а это и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Например, рассмотрим *гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Докажем с помощью критерия Коши его расходимость:

$$\exists\varepsilon>0:\forall N\ \exists n\geqslant N,\, p\in\mathbb{N}\Rightarrow|S_{n+p}-S_n|\geqslant\varepsilon,$$

$$S_{n+p}-S_n=\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{n+p}=\{\text{примем } p=n\}=\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

А теперь докажем следующий интересный результат:

Теорема 45.4.

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\alpha_n+C,$$

где C — постоянная Эйлера (не путать с числом e), а $\alpha_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Доказательство. Докажем сначала лемму:

Лемма 45.5. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши:

$$S_{n+p}-S_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}\leqslant\left\{\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\dots-\frac{1}{n+p}=\frac{p}{n(n+p)}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

[:||||:]

Теперь рассмотрим интеграл $\int\limits_{n}^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)-\ln n$. Можно записать:

$$\ln n=\ln n-\ln 1=\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln k)=\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}.$$

Запишем теперь следующую разность, используя данные равенства, как

$$H_n-\ln n=\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\int\limits_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}\right). \tag{2}$$

Из монотонности функции $\frac{1}{x}$ вытекает, что $\int\limits_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}\geqslant\frac{1}{k+1}$. Но тогда

$$\frac{1}{k}-\int\limits_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}\leqslant\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{k^2}.$$

Таким образом, ряд $\sum\left(\frac{1}{k}-\int\limits_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}\right)$ является положительным и мажорируется другим сходящимся рядом. Значит, этот ряд сходится (см. первый признак сравнения в следующем разделе). Обозначим сумму этого ряда как C. Тогда, сделав предельный переход в (2), получаем

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\alpha_n+C,$$

что и требовалось доказать. **[:||||:]**

Следствие 45.6. *Необходимым условием сходимости числового ряда является стремление к 0 его n-ого члена a_n.*

Доказательство. Действительно, из критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\, p = 1 \Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon,$$

а это и значит, что $\{a_n\} \to 0$. **[:|||||:]**

Следствие 45.7. *Если числовой ряд сходится, то последовательность его остаточных членов $\{r_n\}$ — бесконечно малая.*

Доказательство. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Сделаем в последнем неравенстве предельный переход по p, т.е. устремим $p \to \infty$. Получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leqslant \varepsilon.$$

Но сумма под модулем есть не что иное, как n-ый остаточный член. **[:|||||:]**

4 Числовые ряды с неотрицательными членами

Теорема 45.8. *Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow p_n \geqslant 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n \to \Leftrightarrow \{S_n\}$ — ограничена.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что любая сходящаяся последовательность (в данном случае $\{S_n\}$) является ограниченной. Поскольку $p_n \geqslant 0$, то $\{S_n\} \nearrow$, а тогда по теореме Вейерштрасса эта последовательность сходится т.и.т.т., когда она является ограниченной сверху. Тем самым доказана достаточность. **[:|||||:]**

Теорема 45.9 (*Первый признак сравнения*). *Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leqslant p_n \leqslant q_n$, то*

1. *Из сходимости $\sum q_n$ следует сходимость $\sum p_n$.*

2. *Из расходимости $\sum p_n$ следует расходимость $\sum q_n$.*

Доказательство.

1. Напрямую следует из предыдущей теоремы.

2. Предположим, что $\sum p_n \not\to$, а $\sum q_n \to$. Тогда получаем противоречие с пунктом 1.

[:|||||:]

Заметим, что для справедливости этой теоремы достаточно, чтобы неравенство $0 \leqslant p_n \leqslant q_n$ выполнялось, начиная с некоторого номера $n_0 > 1$. Более того, теорема также справедлива, если данное неравенство можно записать в виде $0 \leqslant p_n \leqslant c q_n$, где $c > 0$.

Следствие 45.10. *Если $p_n > 0, q_n > 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = l \in (0, +\infty)$, то ряды $\sum p_n$ и $\sum q_n$ сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{p_n}{q_n} - l\right| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{p_n}{q_n} < l + \varepsilon \Leftrightarrow q_n(l-\varepsilon) < p_n < q_n(l+\varepsilon).$$

Осталось лишь воспользоваться теоремой 45.9. **[:||||:]**

Теорема 45.11. *Если* $\forall n \in \mathbb{N}$ *или, начиная с некоторого номера, выполняется условие* $\frac{p_{n+1}}{p_n} \leqslant \frac{q_{n+1}}{q_n}$*, то для рядов* $\sum p_n$ *и* $\sum q_n$ *выполняются условия обоих пунктов из теоремы 45.9.*

Доказательство. Пусть, без потери общности, условие выполняется, начиная с $n = 1$. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{p_2}{p_1} \leqslant \frac{q_2}{q_1},\\ \frac{p_3}{p_2} \leqslant \frac{q_3}{q_2},\\ \vdots \\ \frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{q_{n-1}}.\end{gathered}$$

Перемножив все эти неравенства, получим:

$$\frac{p_n}{p_1} \leqslant \frac{q_n}{q_1} \Rightarrow p_n \leqslant \frac{p_1}{q_1} \cdot q_n \text{ и } \frac{q_1}{p_1} \cdot p_n \leqslant q_n.$$

Теперь снова воспользуемся теоремой 45.9. **[:||||:]**

Часть 46
Признаки сходимости

1 Признаки Даламбера и Коши сходимости числового ряда

Следующие два признака основаны на сравнении рассматриваемого ряда с рядом, составленным из элементов геометрической прогрессии, а именно со сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k, \text{ где } |q| < 1,$$

или с расходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$.

Теорема 46.1.

Признак Даламбера	***Признак Коши***

Формулировка в допредельной форме: Если $\forall k \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1 \ \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1\right) \qquad \Bigg| \qquad \sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1 \ (\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1), \tag{1}$$

то ряд $\sum p_k \to$ $(\sum p_k \nrightarrow)$.

В предельной форме: Пусть существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \qquad \Bigg| \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L.$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum p_k$ *сходится, при* $L > 1$ *расходится, а при* $L = 1$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Сначала докажем допредельный случай. Положим $p'_k = q^k$ $(p'_k = 1)$. Тогда, используя (1), получаем

$$\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = q < 1 \ \left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1\right) \qquad \Bigg| \qquad \sqrt[k]{p'_k} = q \ (\sqrt[k]{p'_k} = 1).$$

Эти равенства позволяют нам переписать (1) в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \ \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}\right) \qquad \Bigg| \qquad \sqrt[k]{p_k} \leqslant \sqrt[k]{p'_k} \ (\sqrt[k]{p_k} \geqslant \sqrt[k]{p'_k}).$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь

теоремой 45.11 | теоремой 45.9,

делаем вывод, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

Теперь докажем данную теорему в предельной формулировке. Как мы знаем,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \qquad \Bigg| \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L.$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall k \geqslant N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon \qquad \Bigg| \qquad L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon.$$

Теперь если $L < 1$, то мы можем выбрать такое ε, что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < \underbrace{L + \varepsilon}_{q} < 1 \qquad \Bigg| \qquad \sqrt[k]{p_k} < \underbrace{L + \varepsilon}_{q} < 1.$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится.

Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε, что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1 \qquad\Bigg|\qquad \sqrt[k]{p_k} > L - \varepsilon = 1.$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится.

Наконец, если $L = 1$, то рассмотрим следующие два примера. Пусть $p_k^{(1)} = \frac{1}{k}$, а $p_k^{(2)} = \frac{1}{k^2}$. Для данных рядов получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}^{(i)}}{p_k^{(i)}} = 1,\ i = 1, 2 \qquad\Bigg|\qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k^{(i)}} = 1,\ i = 1, 2.$$

Но при этом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k^{(1)} \nrightarrow$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k^{(2)} \rightarrow$. **[:||||:]**

2 Сравнение данных признаков

Заметим сначала, что в неравенстве (1) нельзя избавиться от q. В качестве примера можно привести ряды из доказательства выше. На практике обычно используется именно предельная формулировка признаков, причем признак Даламбера применяется чаще, несмотря на следующее утверждение.

Утверждение 46.2. *Существуют числовые ряды, о сходимости которых можно сделать вывод, используя признак Коши, но нельзя сделать никакого вывода, используя признак Даламбера.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность, k-ый элемент которой равен

$$p_k = \frac{3 + (-1)^k}{2^{k+1}} = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & k = 2l - 1, \\ \frac{1}{2^{k-1}}, & k = 2l. \end{cases}$$

Тогда

$$\sqrt[k]{p_k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 2l - 1 \\ \frac{\sqrt[k]{2}}{2}, & k = 2l \end{cases} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Тем самым мы доказали сходимость ряда, используя признак Коши. По признаку Даламбера

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{3 + (-1)^{k+1}}{2^{k+2}} \cdot \frac{2^{k+1}}{3 + (-1)^k} = \frac{3 + (-1)^{k+1}}{2 \cdot (3 + (-1)^k)} = \begin{cases} 1, & k = 2l - 1 \\ \frac{1}{4}, & k = 2l \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k}.$$

Видим, что мы не можем сказать что-то определенное касательно данного ряда, используя лишь признак Даламбера, поскольку искомый предел не существует. **[:||||:]**

Стоит, однако, отметить, что данное утверждение не выполняется в обратную сторону. Иными словами, если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$. Таким образом, признак Коши — более сильный признак.

Чтобы доказать это утверждение, докажем сначала две леммы:

Лемма 46.3. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу L, то к тому же пределу сходится и последовательность $\{b_n\}$, где $b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.*

Доказательство. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $n \geqslant N$ имеем

$$b_n - L = \frac{(a_1 - L) + \dots + (a_n - L)}{n} = \frac{(a_1 - L) + \dots + (a_N - L)}{n} + \frac{(a_{N+1} - L) + \dots + (a_n - L)}{n}.$$

Заметим, что модуль дроби справа не превосходит $\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-N}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку номер N фиксирован, модуль дроби слева не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant N_1$, где N_1 — достаточно большое число. **[:|||||:]**

Лемма 46.4. *Если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ сходится к пределу L, то к тому же пределу сходится и последовательность $\{b_n\}$, где $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.*

Доказательство. В силу непрерывности логарифмической функции $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln L$. Но тогда по лемме 46.3

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \dots + \ln a_n}{n} = \ln L.$$

Значит, в силу непрерывности экспоненты $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = L$. **[:|||||:]**

Теперь осталось лишь воспользоваться леммой 46.4, применяя ее к числам $a_1 = p_1$, $a_2 = \frac{p_2}{p_1}, \dots, a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$.

3 Интегральный признак Коши-Маклорена

Теорема 46.5. *Пусть при любом $k \in [1, +\infty)$ выполняется $f(k) \geqslant 0$, причем $f(k) \searrow 0$. Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ эквивалентна сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.*

Доказательство. При $x \in [k, k+1]$, в силу $f(x) \searrow$, имеем $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$. Возьмем определенный интеграл от всех частей неравенства:

$$\int\limits_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(k)\,dx,$$

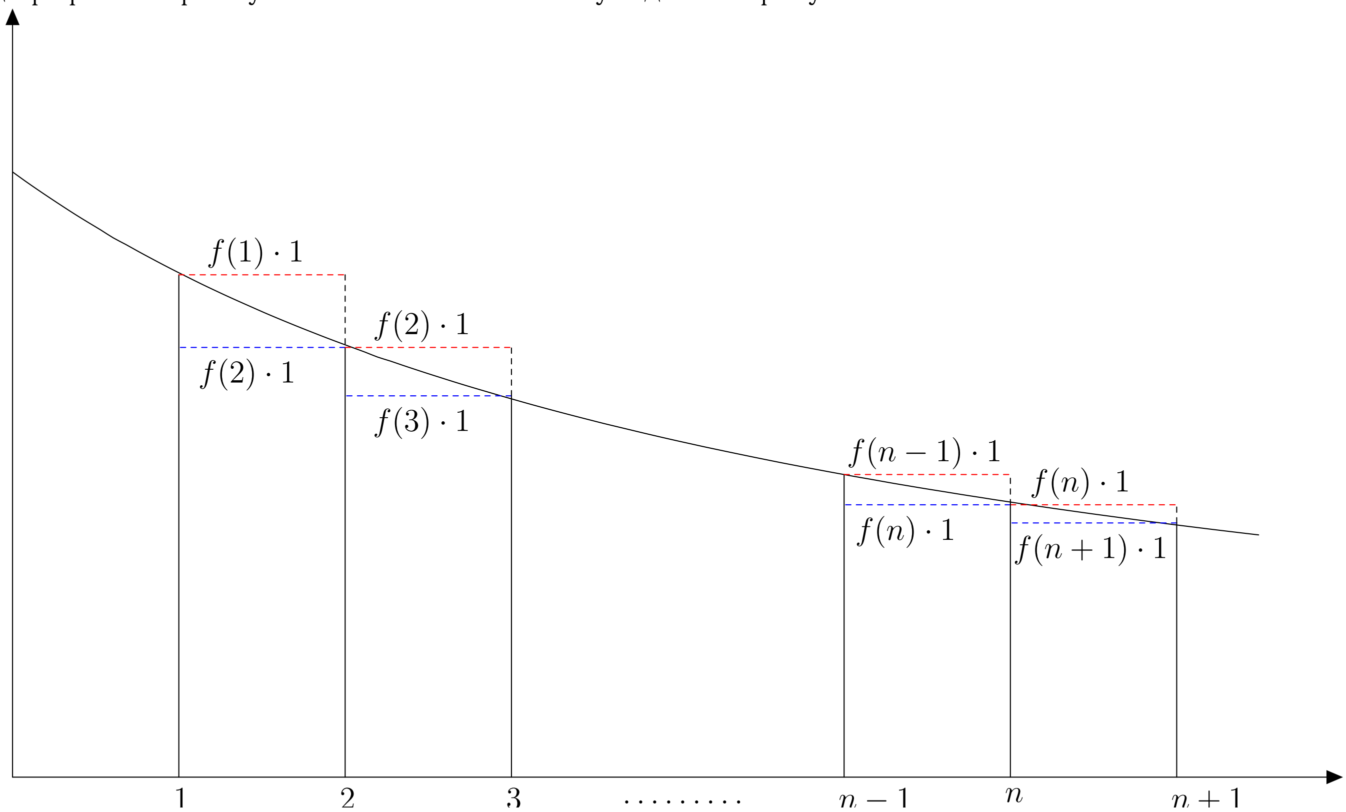
$$f(k+1) \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k).$$

Просуммируем теперь это неравенство по всем $k = \overline{1, n}$. Получаем

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Теперь, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ $\to$, то из правой части неравенства следует, что сходится и $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$. Если же сходится интеграл, то из левой части неравенства вытекает, что сходится ряд. Аналогично с расходимостью. **[:|||||:]**

Заметим, что у последнего неравенства есть наглядная геометрическая интерпретация. Если взять отрезок от 1 до $n+1$ и разбить его на прямоугольники ширины 1, то слагаемое $\sum\limits_{k=2}^{n+1} f(k)\cdot 1$ соответствует площади всех вписанных прямоугольников, $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ соответствует площади под графиком на $[1, n+1]$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)\cdot 1$ соответствует площади всех описанных над фигурой под графиком прямоугольников. Это можно увидеть на рисунке ниже.



А теперь рассмотрим пару примеров применения данного признака на практике.

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Отметим сразу, что при $\alpha \leqslant 0$ данный ряд расходится по теореме 45.6. При $\alpha > 0$ последовательность $\frac{1}{k^\alpha} \searrow 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

  А этот интеграл мы уже хорошо умеем исследовать на сходимость. В итоге получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

- Другим примером может служить $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right)$. При $\alpha \leqslant 0$ ряд расходится по теореме 45.6. Если же $\alpha > 0$, то можно сказать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right) \Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right)\,dx \Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Последний переход наглядно демонстрирует удобство признака Коши-Маклорена. Мы можем пользоваться богатыми возможностями исследования несобственных интегралов.

Часть 47
Знакопеременные числовые ряды I

1 Абсолютная и условная сходимость

Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится **абсолютно**, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| \to$. Обозначать этот факт будем, как и в случае несобственных интегралов, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс}}$.

Утверждение 47.1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. По критерию Коши имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Осталось лишь воспользоваться неравенством $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$ **[:||||:]**

Будем говорить, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится **условно**, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится. Примером такого ряда может служить *ряд Лейбница* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, а этот ряд расходится. Докажем теперь, что сам ряд сходится. Рассмотрим следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),\ \text{где } R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)}.$$

Это разложение имеет место при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\Theta \leqslant 1$. Заметим тогда, что $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Если теперь подставить в данное разложение $x = 1$:

$$\ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_n(1),$$

то получаем в точности $S_n + R_n(1)$, где S_n — n-ая частичная сумма исходного ряда. Но $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(1) = 0$, поэтому, перейдя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$, получаем

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Таким образом, ряд сходится, и его сумма равна $\ln 2$.

2 Теорема Римана

А сейчас мы докажем, что хорошо известный переместительный закон сложения не всегда выполняется в случае бесконечных сумм.

Теорема 47.2. *Какого бы ни было число $L \in \overline{\mathbb{R}}$, члены условно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ можно переставить так, чтобы его сумма стала равной L.*

Доказательство. Обозначим через $p_1, \dots, p_n, \dots$ положительные члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, занумерованные в порядке следования, а через $q_1, \dots, q_n, \dots$ модули отрицательных членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, также выписанные в порядке следования. Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов, ибо в противном случае, отбросив конечное число членов ряда одного знака, мы бы получили, что знакопостоянный ряд сходится (т.е. он сходится абсолютно).

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Обозначим через $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, а через P_n и Q_n сумму всех положительных и всех модулей отрицательных членов соответственно, входящих в S_n. Тогда $S_n = P_n - Q_n$, а значит

$$\lim_{n\to\infty} (P_n - Q_n) = S.$$

С другой стороны, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не сходится абсолютно. Это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} (P_n + Q_n) = +\infty.$$

Сопоставляя последние два равенства, получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n \to +\infty$. Это значит, что мы можем взять как из членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, так и из членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ столь большое число членов, что их сумма превзойдет любое наперед заданное число. Выберем k_1 таким образом, что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > L$, но $p_1 + \dots + p_{k_1 - 1} \leqslant L$ (если $L < 0$, то просто пропустим этот шаг). Заметим, что модуль разности L и полученной суммы не превосходит p_{k_1}. Теперь выберем k_2 так, чтобы $p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2} < L$, но $p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{k_2 - 1} \geqslant L$. Заметим опять, что модуль разности L и полученной суммы не превосходит модуля q_{k_2}.

Далее снова прибавим некоторое количество членов p_i так, чтобы $p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_3} > L$, а потом аналогично вычтем некоторое количество членов q_i, как это было сделано выше. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечный ряд, в состав которого войдут все члены исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Полученный ряд состоит из чередующихся групп положительных и отрицательных членов. Рассмотрим n-ую частичную сумму этого ряда. Если она заканчивается полностью завершенной группой, то, как было показано выше, модуль разности L и данной частичной суммы не превосходит модуля последнего члена группы.

Если же n-ая частичная сумма заканчивается незавершенной группой, то модуль ее разности и L также не превосходит модуля последнего члена предпоследней группы. Таким образом, осталось доказать, что модули последних членов групп образуют бесконечно малую последовательность. Но это непосредственно следует из теоремы 45.6, т.е. теорема доказана.

Следует отметить, что мы также доказали и случай, когда $L = \infty$. Действительно, предположим, что мы не можем переставить члены ряда так, чтобы достичь ∞. Тогда существует верхняя граница M, которую мы можем достичь перестановкой членов, а сумму, большую M, уже нет. Но мы только что доказали, что любую наперед заданную сумму $L > M$ можно набрать. Получили противоречие. **[:||||:]**

Часть 48
Знакопеременные числовые ряды II

1 Теорема Коши

Теорема 48.1. *Если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то любая его перестановка членов сходится к той же самой сумме.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс.}} S$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$ — некоторая перестановка членов исходного ряда. Требуется доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k = S$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k \xrightarrow{\text{абс.}}$. Докажем сначала первое утверждение.

Для этого достаточно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - S \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Зафиксируем произвольное ε. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то по признаку Коши

$$\exists N'_0 : \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=N'_0+1}^{N'_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

а по определению сходимости ряда

$$\exists N''_0 : \left| \sum_{k=1}^{N''_0} u_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Напоминаем, что данные неравенства по определениям выполняются и для $n \geqslant N'_0, N''_0$. Примем $N_0 = \max\{N'_0, N''_0\}$, чтобы для этого номера выполнялись оба неравенства. Теперь возьмем такое N, чтобы любая частичная сумма S'_n ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$ при $n \geqslant N$ содержала все первые N_0 членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Заметим, что такое N всегда можно выбрать, поскольку мы просто переставили некоторые члены исходного ряда.

Оценим теперь разность, стоящую в левой части неравенства (1). Пусть $n \geqslant N$. Указанную разность можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} u'_k - S = \left(\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right).$$

Переходя к модулям, получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - S \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right|.$$

Если воспользоваться неравенством (3), то осталось доказать, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вспомним теперь, что мы таким образом выбрали N, что при $n \geqslant N$ первая из сумм содержит все N_0 членов второй суммы. Поэтому указанная выше разность представляет собой сумму $n - N_0$ членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ с номерами, каждый из которых превосходит N_0.

Тогда выберем такое p, чтобы номер $N_0 + p$ превосходил номера всех $n - N_0$ членов только что указанной суммы. Тогда справедливо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|.$$

Но теперь, пользуясь неравенством (2), получаем то, что и требовалось доказать. Таким образом, мы доказали, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k' \to S$. Осталось лишь доказать, что он сходится абсолютно. Для этого достаточно применить приведенное выше доказательство для рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k'|$.

[:|||||:]

2 Арифметические операции над сходящимися числовыми рядами

Теорема 48.2. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u < \infty$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = v < \infty$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = u \pm v$.

Доказательство. Непосредственно следует из аналогичного свойства для пределов. Пусть S_{u_n} — n-ая частичная сумма первого ряда, а S_{v_n} — n-ая частичная сумма второго ряда. Тогда

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} S_{u_n} = u, \\ \lim\limits_{n\to\infty} S_{v_n} = v, \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_{u_n} \pm S_{v_n}) = u \pm v.$$

[:|||||:]

Теорема 48.3. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс.}} u$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k \xrightarrow{\text{абс.}} v$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$, *составленный из всевозможных произведений* $u_i \cdot v_j$ *сходится абсолютно к* $u \cdot v$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |w_k| \to$. Возьмем произвольное n_0 и рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{n_0} |w_k|$. Эта сумма состоит из членов вида $|u_i v_j|$. Найдем среди этих индексов i и j наибольший индекс m, входящий в исследуемую сумму. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leqslant (\underbrace{|u_1| + \cdots + |u_m|}_{\leqslant M_1}) \cdot (\underbrace{|v_1| + \cdots + |v_m|}_{\leqslant M_2}) \leqslant M_1 M_2.$$

Ограничения M_1 и M_2 следуют из абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Мы ограничили n_0-ую частичную сумму исследуемого ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |w_k|$, значит этот ряд сходится. Осталось лишь доказать, что он сходится к uv.

Пусть данный ряд сходится к S. Заметим, что в силу теоремы 48.1 мы можем как угодно переставлять члены ряда w_i, не влияя на сходимость. Иными словами, любая последовательность или подпоследовательность частичных сумм будет сходиться к S. Тогда рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_{m^2}\}$, где $S_{m^2} = (u_1 + \cdots + u_m)(v_1 + \cdots + v_m)$. Но

$$S_{m^2} = (\underbrace{u_1 + \cdots + u_m}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} u})(\underbrace{v_1 + \cdots + v_m}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} v}) \xrightarrow[m\to\infty]{} uv.$$

Поскольку последовательность частичных сумм, как доказано выше, сходится, то и все подпоследовательности частичных сумм сходятся к одному и тому же числу uv, что и требовалось доказать. **[:||||:]**

3 Произведение рядов по Коши

Произведением рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ **по Коши** называется ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$, где

$$\begin{aligned} &w_1 = u_1 v_1, \\ &w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1, \\ &\qquad \vdots \\ &w_k = u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \cdots + u_k v_1. \end{aligned}$$

Теорема 48.4 (***Мертенса***). *Если один из рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *сходится абсолютно, а второй хотя бы условно, то произведение этих рядов по Коши сходится к произведению сумм данных рядов.*

Здесь стоит отметить, что если оба ряда сходятся только условно, то их произведение по Коши, вообще говоря, расходится. В качестве примера можно привести ряды $u_k = v_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Тогда

$$|w_k| = \left|(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{k}}\right)\right| > \left|(-1)^{k+1}\left(\frac{k}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}\right)\right| = 1.$$

Из чего следует, что необходимое условие сходимости ряда нарушено ($w_k \nrightarrow 0$ при $k \to \infty$).

Часть 49

Признаки сходимости произвольных числовых рядов

Теорема 49.1 (***Признак Лейбница***). *Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $a_k \geqslant a_{k+1}$, причем $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Тогда числовой ряд (называемый **рядом Лейбница**) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ сходится, причем*

$$|r_k| = \left|\sum_{l=k+1}^{\infty}(-1)^{l+1}a_l\right| \leqslant a_{k+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда Лейбница S_{2n}:

$$0 \leqslant S_{2n} = (\underbrace{a_1 - a_2}_{\geqslant 0}) + (\underbrace{a_3 - a_4}_{\geqslant 0}) + \dots + (\underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{\geqslant 0}) =$$
$$= a_1 - (\underbrace{a_2 - a_3}_{\geqslant 0}) - (\underbrace{a_4 - a_5}_{\geqslant 0}) - \dots - (\underbrace{a_{2n-2} - a_{2n-1}}_{\geqslant 0}) - a_{2n} \leqslant a_1.$$

Из этого можно сделать вывод, что последовательность $\{S_{2n}\}$ — ограниченная и монотонно неубывающая. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. С другой стороны, видно, что $S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S + 0 = S$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Итак, мы доказали, что ряд сходится. Теперь докажем вторую часть теоремы. Для этого заметим, что поскольку $\{S_{2n}\}$ не убывает, а $\{S_{2n-1}\}$ не возрастает (т.к. $S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$), то $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}$, а также $S \leqslant S_{2n+1}$. По определению остаточного члена $r_{2n} = S - S_{2n}$. Пользуясь этими замечаниями, можно записать

$$r_{2n} = S - S_{2n} \leqslant S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1},$$
$$S_{2n-1} - S \leqslant S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \Rightarrow |r_{2n-1}| \leqslant a_{2n}.$$

Но тогда $|r_n| \leqslant a_{n+1}$, что и требовалось доказать. **[:||||:]**

Рассмотрим теперь ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. Примем $A_k = \sum\limits_{l=1}^{k} a_l$, $B_k = \sum\limits_{l=1}^{k} b_l$, причем $B_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$
$$= a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k).$$

Выделим полученный результат:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k).} \tag{1}$$

Мы получили так называемое **преобразование Абеля**, оно нам очень пригодится в дальнейшем. Проницательный читатель может заметить сходство с интегрированием по частям, и, действительно, это преобразование называется *дискретным интегрированием по частям*.

Сформулируем теперь еще пару полезных признаков.

Теорема 49.2 (***Признак Дирихле***). *Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а последовательность $\{B_n\}$ ограничена (например, числом $M > 0$). Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k \to$.*

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Из условия теоремы следует, что $a_n B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Из ограниченности $\{B_n\}$ и монотонности $\{a_n\}$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k(a_{k+1} - a_k)| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| = M \left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \right| = M \cdot |a_1| \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} B_k(a_{k+1} - a_k) \xrightarrow{\text{абс.}} .$$

А это означает, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k)$. Но тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k \to$. **[:|||||:]**

Стоит отметить, что в условиях признака Дирихле справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant |a_1| \cdot \sup_n |B_n|.$$

Ее можно получить, если использовать в качестве M указанную точную верхнюю грань, а дальше воспользоваться приведенным доказательством.

Можно заметить, что признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле.

Теорема 49.3 (***Признак Абеля***). *Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \to$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k \to$.*

Доказательство. Заметим, что раз $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда $a_n = a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая, причем в силу монотонности $\{a_n\}$ последовательность $\{\alpha_n\}$ также является монотонной. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a b_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k.$$

Здесь первый ряд сходится, т.к. сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, а второй ряд сходится по признаку Дирихле ($\{B_k\}$ ограничена, т.к. соответствующий ряд сходится). Значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k \to$. **[:|||||:]**

Часть 50
Асимптотика числовых рядов

1 Асимптотическое поведение остатков сходящихся рядов и частичных сумм расходящихся рядов

Пусть функция $f(x) \searrow 0$, $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 1$. Тогда

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Объяснение этому факту и его графическая иллюстрация были приведены на странице 151. Аналогично можно заметить, что $r_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx$. Значит,

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant r_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Это значит, что последовательность $\{r_n\}$ убывает при $n \to \infty$ не медленнее, чем $\left\{\int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx\right\}$ и не быстрее, чем $\left\{\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx\right\}$. Тогда разность $0 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k) - \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx$ не убывает с ростом n. Запишем теперь, используя монотонность $f(x)$, следующие неравенства:

$$f(k) \geqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx,$$

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \Rightarrow f(k) - \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) - f(k+1).$$

Просуммируем теперь последнее неравенство по $k = \overline{1, n-1}$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(1) - f(n) \leqslant f(1).$$

Мы ограничили последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k) - \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx\right\}$, а выше было показано, что она не убывает. Значит

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx\right) = C < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx + C + \underbrace{\alpha_n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}.$$

Интересно то, что в процессе вывода мы нигде не требовали сходимость ряда или интеграла, поэтому можно исследовать асимптотическое поведение и расходящегося ряда с помощью несобственного интеграла. А теперь рассмотрим пару примеров использования данного предельного равенства.

- Рассмотрим $\int\limits_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$. Тогда

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n+1) + C_Э + \alpha_n} = \ln n + C_Э + \beta_n.$$

Полученное равенство было, впрочем, доказано нами ранее в теореме 45.4. Оно называется **формулой Эйлера**.

- Пусть $\alpha \in (0,1)$. Тогда

$$\int\limits_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} + C + \beta_n.$$

- А теперь пусть $\alpha > 1$. Тогда

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$$

Теперь, пользуясь этим и неравенством (1), получаем

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}.$$

2 Неравенство Абеля

Теорема 50.1. *Пусть $a_k \geqslant a_{k+1}$ или $a_k \leqslant a_{k+1}$ для $\forall k = \overline{1, n-1}$, а также $|b_1 + \dots + b_k| \leqslant M$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тогда $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M(|a_1| + |2a_n|)$.*

Доказательство. Напомним, что $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Теперь воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)\right| \leqslant |a_n B_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| \cdot |a_{k+1} - a_k|.$$

Теперь можно использовать ограниченность $|B_k|$:

$$|a_n B_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| \cdot |a_{k+1} - a_k| \leqslant M|a_n| + M \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|.$$

В силу монотонности $\{a_k\}$ модули под знаком суммы раскроются таким образом, что все члены кроме первого и последнего сократятся. В итоге, получаем

$$M|a_n| + M \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| = M|a_n| + M|a_1 - a_n| \leqslant M(|a_1| + |2a_n|).$$

[:||||:]

Часть 51

Бесконечные произведения

1 Сходимость бесконечного произведения

Рассмотрим формально составленное произведение $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots = \prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, называемое **бесконечным произведением**. Здесь p_n — n-ый член бесконечного произведения. Обозначим также $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ — n-ое частичное произведение.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ называется **сходящимся**, а P называется его **значением**.

Теорема 51.1 (***Необходимое условие сходимости бесконечного произведения***). *Если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.*

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

[:|||||:]

Заметим, что это доказательство возможно провести именно благодаря тому, что по условию сходимости $P \neq 0$ (вот почему вводится это требование). Следует также отметить, что отбрасывание конечного числа ненулевых членов не влияет на сходимость бесконечного произведения. Подобно числовому ряду в этом случае каждый член произведения делится на некоторое фиксированное число.

Предположим, что некоторое произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится. Тогда в силу необходимого условия

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |p_n - 1| < \varepsilon.$$

Это значит, что за исключением конечного числа членов все члены бесконечного произведения положительны. Без потери общности мы будем считать, что $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow p_n > 0$.

Теорема 51.2. *Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n \to \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n \to$.*

Доказательство. Заметим, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right) = \ln P_n.$$

Тогда $P_n = e^{S_n}$. Теперь утверждение теоремы вытекает из непрерывности и монотонности показательной и логарифмической функций. **[:|||||:]**

Обычно с бесконечными произведениями довольно неудобно работать. Облегчить проблему может немного другое представление. Удобно представлять бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ в виде $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$. Из необходимого условия вытекает, что $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Аналогично, мы можем считать, что $a_n > -1$.

Удобство такого представления бесконечного произведения демонстрирует следующая теорема.

Теорема 51.3 (*Критерий сходимости бесконечного произведения*). *Если все a_n сохраняют знак, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \to \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \to$.*

Доказательство. По теореме 51.2 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \to \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) \to$. Из необходимых условий сходимости бесконечного произведения и числового ряда вытекает, что $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда $\ln(1+a_n) \sim a_n$ при $n \to \infty$. Далее, используя следствие 45.10, получаем доказываемое. **[:|||||:]**

К сожалению, данный критерий не работает для знакопеременных рядов. В этом случае можно пользоваться следующим ***достаточным условием сходимости***.

Теорема 51.4. *Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \to$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \to$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n \to$.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что сходится $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, что по теореме 51.2 эквивалентно сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$. Из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{a_n^2}{2} + \bar{o}(a_n^2) \right).$$

Нам осталось лишь доказать сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{o}(a_n^2)$. Вспомним, что по определению мы фактически имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot \varphi(a_n^2)$, где $\varphi(a_n^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Рассмотрим абсолютную сходимость этого ряда:

$$|a_n^2 \cdot \varphi(a_n^2)| \leqslant M|a_n^2|.$$

Здесь мы ограничили $\varphi(a_n^2) \leqslant M$, поскольку эта последовательность сходится (значит, она ограничена). Заметим, что теперь мы имеем дело со знакопостоянным рядом, а значит, мы можем воспользоваться теоремой 45.9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится по условию, поэтому сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\bar{o}(a_n^2)|$. Но тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{o}(a_n^2)$ сходится и подавно. **[:|||||:]**

Отметим, что данное условие ***не является необходимым***. Рассмотрим $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, где

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & n = 2k+1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}, & n = 2k. \end{cases}$$

Совершенно очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \nrightarrow$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \nrightarrow$. Однако

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_{2k})(1+a_{2k+1}) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \to .$$

Как видим, данное произведение сходится по признаку 51.3.

2 Абсолютная сходимость

Будем говорить, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится **абсолютно**, если сходится $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$.

Теорема 51.5 (***Критерий абсолютной сходимости***). *Бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \xrightarrow{абс} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n) \xrightarrow{абс.} \text{ и/или } \sum_{n=1}^{\infty}a_n \xrightarrow{абс.}.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 51.2, только теперь $p_n = 1+|a_n|$. **[:||||:]**

Часть 52
Обобщенные методы суммирования

1 Введение

Рассмотрим следующий числовой ряд:

$$S_1 = 1-1+1-1+\dots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}.$$

Очевидно, что он расходится, поскольку $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Но заметим теперь, что

$$S_1 = 1-(1-1+1-1+\dots) = 1-S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}.$$

Также можно привести в качестве примера ряд

$$S_2 = 1-2+3-4+5-6+\dots$$

Найдем S_2+S_2:

$$\begin{aligned}
&1-2+3-4+5-6+\dots\\
&\quad 1-2+3-4+5-6+\dots\\
&1-1+1-1+1-1+\dots
\end{aligned}$$

Иными словами, $S_2+S_2 = S_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$. Наконец, рассмотрим очевидно расходящийся ряд

$$S_3 = 1+2+3+\dots = \sum_{k=1}^{\infty}k.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
S_3 - S_2 = &1+2+3+4+\dots\\
&1-2+3-4+\dots\\
&0+4+0+8+0+12+\dots = 4(1+2+3+\dots),
\end{aligned}$$

т.е. $S_3 - S_2 = 4S_3 \Rightarrow S_3 = -\frac{1}{12}$.

Данные примеры показывают, что иногда удобно обобщить понятие суммы ряда для того, чтобы можно было как-то оперировать с расходящимися рядами. Сейчас мы рассмотрим несколько таких обобщенных методов.

Будем говорить, что сумма ряда равна U в пиквикском смысле (т.е. неопределенном) и обозначать это как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = U(P)$. При этом для данного суммирования в пиквикском смысле потребуем выполнение двух условий:

1. **Линейность.** Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = U(P)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = V(P)$, то
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k \pm \beta v_k) = (\alpha U \pm \beta V)(P).$$

2. **Регулярность.** Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = U$, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = U(P)$.

А теперь рассмотрим два наиболее интересных метода суммирования.

2 Метод Чезаро (метод средних арифметических)

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = U(C,1)$, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = U$, где
$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Линейность данного метода очевидна. Докажем регулярность.

Теорема 52.1. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S(C,1)$.

Доказательство. По определению предела и в силу сходимости ряда
$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда
$$|\sigma_n - S| \leqslant \frac{|S_1 - S| + |S_2 - S| + \dots + |S_n - S|}{n} = \frac{|S_1 - S| + \dots + |S_{N-1} - S|}{n} + \frac{|S_N - S| + \dots + |S_n - S|}{n}.$$

Заметим, что в числителе дроби слева стоит лишь конечное число слагаемых $(N-1)$, а значит, делая n достаточно большим, мы можем его сделать сколь угодно малым, например, меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Для каждого же слагаемого в числителе дроби справа воспользуемся оценкой, приведенной выше. Получаем
$$|\sigma_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\frac{n - N + 1}{n}}_{<1} < \varepsilon.$$

[:|||||:]

Воспользуемся теперь этим методом, чтобы вычислить сумму самого первого примера $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$. Очевидно, что $S_{2n} = 0$, а $S_{2n+1} = 1$. Тогда $\sigma_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, а $\sigma_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

3 Метод Пуассона-Абеля

По данному ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ составим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + \dots + u_n x^{n-1} + \dots$$

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S(A)$, если справедливо

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = S(x)$ при $x \in (0,1)$.
2. $\exists \lim\limits_{x \to 1-0} S(x) = S$.

Линейность данного метода следует из линейности степенного ряда. С регулярностью дело обстоит немного сложнее.

Теорема 52.2. *Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S$, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S(A)$.*

Доказательство. Заметим, что

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}. \tag{1}$$

Это действительно так, поскольку:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} S_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k x^{k-1} + S_n x^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} S_k x^k =$$
$$= (1-x) \sum_{k=1}^{n-1} S_k x^{k-1} + S_n x^{n-1}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем в точности (1).

Теперь, учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$, можно заключить, что

$$(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1} = S. \tag{2}$$

Вычитая (1) $-$ (2), получаем

$$S(x) - S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S) x^{k-1}.$$

Тогда

$$|S(x) - S| \leqslant (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} |S_k - S| x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{K_0} |S_k - S| x^{k-1} + (1-x) \sum_{k=K_0+1}^{\infty} |S_k - S| x^{k-1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists K_0(\varepsilon) > 0 : \forall k \geqslant K_0(\varepsilon) \Rightarrow |S_k - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая это,

$$\sum_{k=K_0+1}^{\infty} x^{k-1} < \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow (1-x)\sum_{k=K_0+1}^{\infty} |S_k - S| x^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь заметим, что при $x \in (1-\delta(\varepsilon), 1)$ выполняется

$$(1-x)\sum_{k=1}^{K_0} |S_k - S| x^{k-1} = \text{б.м.} \cdot \text{огр.} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Где в качестве бесконечно малой выступает $1-x$ при указанных x, а ограниченной является сумма. В итоге, мы получили

$$|S(x) - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ при } x \in (1-\delta(\varepsilon), 1).$$

Но это и означает, что $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = S$. **[:|||||:]**

Если теперь применить данный метод к суммированию первого примера, то получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1-0]{} \frac{1}{2}.$$

Наконец, между данными методами суммирования существует тесная связь:

Теорема 52.3 (*Фробениуса*). *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S(C,1)$*, то и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S(A)$.

Отметим, что ***обратное неверно!*** Действительно, рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(k+1) = 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots$$

Воспользуемся методом Пуассона-Абеля. Для этого рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(k+1)x^{k-1}.$$

Найдем его сумму:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(k+1)\cdot x^{k-1} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)\cdot(k+1)\cdot(-x)^k = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} ((-x)^{k+1})' = \frac{1}{x}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k+1}\right)' =$$
$$= \frac{1}{x}\cdot\left(x^2\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1}\right)' = \frac{1}{x}\cdot\left(x^2\cdot\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{x+2}{(x+1)^2}.$$

Тогда

$$S = \lim_{x\to 1-0} S(x) = \frac{3}{4}.$$

Попробуем теперь воспользоваться методом Чезаро. Заметим, что

$$S_{2n} = -n,$$
$$S_{2n-1} = n + 1.$$

Тогда

$$\sigma_{2n} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{2n}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$
$$\sigma_{2n-1} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{2n-1}}{2n-1} = \frac{2n}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Таким образом, по Чезаро данный ряд не сходится.

Часть 53
Функциональные последовательности и ряды

1 Понятие функциональных последовательностей и рядов

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, где $f_n\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{C}$, а $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. Будем говорить, что **функциональная последовательность** $\{f_n(x)\}$ **сходится** на $\mathbb{E}$, если $\forall x_0 \in \mathbb{E}$ сходится уже числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$. Данная сходимость называется **поточечной** и обозначается как $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\mathbb{E}}$.

Совокупность пределов, взятых $\forall x_0$, составляет функцию $f(x)$, которую называют **предельной функцией** $\{f_n(x)\}$. Иными словами, $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

2 Равномерная сходимость

Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на $\mathbb{E}$ **равномерно** к функции f, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Самое важное — понять, чем отличается равномерная сходимость от поточечной. Заметим, что в определении равномерной сходимости число N зависит **только** от ε и предъявляется сразу для всех значений x_0. В определении же поточечной сходимости число N (если расписать определение предела) зависит не только от ε, но и от x_0, поскольку для каждого значения x_0 мы ищем соответствующий предел отдельно от всех остальных.

Для равномерной сходимости принято использовать обозначение $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$.

Теорема 53.1 (***Критерий равномерной сходимости***)**.** $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\mathbb{E}} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Доказательство. На самом деле мы просто переформулировали определение. Действительно, по определению

$$\{f_n(x)\} \underset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow \sup_{\mathbb{E}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon = \varepsilon' \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{E}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

[:|||||:]

Из сделанного выше замечания по поводу разницы между поточечной и равномерной сходимостью следует, что если $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$, то $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\mathbb{E}} f(x)$. ***Обратное, вообще говоря, неверно!*** Это демонстрируют следующие примеры.

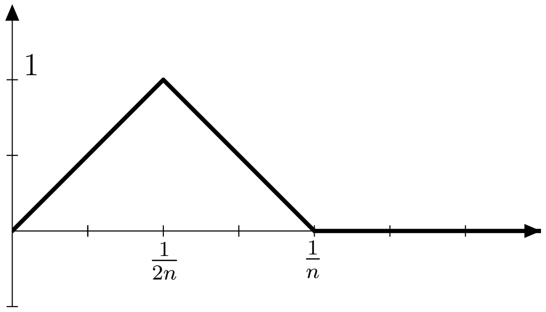
- $f_n(x) = x^n$, где $x \in [0, 1)$. Легко увидеть, что $f_n(x) \xrightarrow{[0,1)} f(x) \equiv 0$. С другой стороны, $\sup\limits_{[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = 1 \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Напомним, что здесь мы сначала ищем супремум для некоторого n, а потом уже берем предел при $n \to \infty$. А как известно, $\sup\limits_{[0,1)} |x^n| = 1$ для любого n.

  Таким образом, функциональная последовательность сходится к 0 поточечно, но не равномерно. Если же взять $\mathbb{E} = [0, q]$, где $q \in [0, 1)$, то теперь $\sup\limits_{[0,q]} |x^n| = q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е. $\{x^n\} \rightrightarrows 0$.

- Можно также рассмотреть функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x \geqslant \dfrac{1}{n}. \end{array}\right. \\ 1, & x = \frac{1}{2n}, \\ \text{линейная}, & x \in \left(0, \frac{1}{2n}\right) \cup \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

  График этой функции выглядит так:



  Нетрудно заметить, что $f_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}^+} f(x) \equiv 0$. С другой стороны также наглядно видно, что $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$.

Теорема 53.2 (***Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности***)**.**

$$\{f_n(x)\} \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  Пусть $\{f_n(x)\} \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда

  $$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Тогда и подавно $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но

  $$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- ***Достаточность.***

  Зафиксируем произвольное $x \in \mathbb{E}$. Теперь, используя признак Коши сходимости числовой последовательности, получаем сходимость $\{f_n(x)\}\ \forall x \in \mathbb{E}$. А это значит, что существует предельная функция $f(x)$.

  Снова зафиксируем произвольные $x \in \mathbb{E}$ и $\varepsilon > 0$. Делая предельный переход в неравенстве $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ при $p \to \infty$, получаем $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon = \varepsilon'$.

[:|||||:]

Будем называть **функциональным рядом** бесконечную сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Подобно тому, как от рассмотрения числовых последовательностей мы перешли к функциональным, так и здесь мы переходим от числовых рядов к функциональным. Будем говорить, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} S(x)$ (т.е. функциональный ряд сходится **равномерно**), если $S_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} S(x)$, где $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Под **абсолютной сходимостью** функционального ряда будем понимать, как и в случае числовых рядов, **поточечную** сходимость ряда, составленного из модулей функций. Отметим, что функциональный ряд может сходиться равномерно, но не сходиться абсолютно.

Теорема 53.3 (***Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда***)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 53.2. Достаточно рассмотреть последовательность частичных сумм $S_n(x)$. **[:|||||:]**

Теорема 53.4 (***Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда***)**.** *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows}$, *то* $u_k(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство. Просто заметим, что $u_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} S(x) - S(x) = 0$, где $U_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. **[:|||||:]**

Часть 54
Признаки равномерной сходимости

Здесь мы рассмотрим дополнительные, достаточные признаки равномерной сходимости числовых рядов. Будем обозначать ряды с помощью маленьких букв, а их частичные суммы при помощи тех же заглавных букв. Для начала рассмотрим самый простой и чаще всего используемый признак.

1 Признак Вейерштрасса

Теорема 54.1. *Пусть* $\exists\{c_k\} : \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow |u_k(x)| \leqslant c_k$. *Тогда если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \to$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Воспользуемся признаком Коши сходимости числового ряда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| < \varepsilon.$$

Заметим, что модуль можно опустить. В условии теоремы мы неявно полагаем, что $c_k \geqslant 0$, иначе условие $|u_k(x)| \leqslant c_k$ никак не может выполняться. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon.$$

[:|||||:]

Еще раз отметим, что данное условие ***не является необходимым***. Возьмем числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, сходящийся *условно*, и рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, где $u_k(x) = c_k \cdot x$, а $x \in [0,1]$. Заметим, что $|c_k \cdot x| \leqslant |c_k|$, т.к. $\sup\limits_{[0,1]} |c_k \cdot x| = |c_k|$. Но $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k| \nrightarrow$, ведь ряд сходится условно. С другой стороны, если воспользоваться критерием Коши:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \cdot x\right| = |x| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| < \varepsilon.$$

2 Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости

Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ **равномерно ограничена** на $\mathbb{E}$, если $\exists M > 0 : \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow |f_k(x)| \leqslant M$.

Теорема 54.2 (*Признак Дирихле*). *Пусть выполнено:*

1. *Последовательность частичных сумм* $\{U_n(x)\}$ *равномерно ограничена на* $\mathbb{E}$.

2. *Функциональная последовательность* $\{v_k(x)\}$ *монотонна по* k *на* $\mathbb{E}$ *и* $\{v_k(x)\} \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} 0$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot v_k(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $x \in \mathbb{E}$ и воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} (U_k(x) - U_{k-1}(x))v_k(x) = \sum_{k=1}^{p}(U_{n+k}(x) - U_{n+k-1}(x))v_{n+k}(x) =$$

$$= U_{n+p}(x)v_{n+p}(x) - \sum_{k=1}^{p-1} U_{n+k}(x)(v_{n+k+1}(x) - v_{n+k}(x)) - U_n(x)v_{n+1}(x) =$$

$$= U_{n+p}(x)v_{n+p}(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} U_k(x)(v_{k+1}(x) - v_k(x)) - U_n(x)v_{n+1}(x).$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\cdot v_k(x)\right| \leqslant |U_{n+p}(x)v_{n+p}(x)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |U_k(x)|\cdot|v_{k+1}(x)-v_k(x)| + |U_n(x)v_{n+1}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |U_{n+p}(x)v_{n+p}(x)| + M(|v_{n+p}(x)|+|v_{n+1}(x)|) + M|v_{n+1}(x)| \leqslant M(2|v_{n+p}(x)|+2|v_{n+1}(x)|).$$

Здесь мы воспользовались первым условием теоремы, чтобы ограничить $|U_k(x)| \leqslant M$ и монотонностью $\{v_k(x)\}$ по k. Именно монотонность дает нам возможность раскрыть модули в последней сумме таким образом, чтобы в результате все члены кроме крайних сократились. **[:||||:]**

Теорема 54.3 (*Признак Абеля*). *Пусть выполнены условия:*

1. *Функциональная последовательность $\{v_k(x)\}$ равномерно ограничена на $\mathbb{E}$, и $\forall x \in \mathbb{E}$ последовательность $\{v_k(x)\}$ монотонна по k.*
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows}$.

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)\cdot v_k(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. По определению равномерной ограниченности $\exists M > 0 : \forall x \in \mathbb{E}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |v_k(x)| \leqslant M$. Из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначим $\widetilde{U}_p(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)$. Тогда $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |\widetilde{U}_p(x)| < \varepsilon$. Теперь воспользуемся преобразованием Абеля и монотонностью $\{v_k(x)\}$ по аналогии с доказательством признака Дирихле.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{p}(\widetilde{U}_k(x)-\widetilde{U}_{k-1}(x))v_{n+k}(x)\right| =$$
$$= \left|v_{n+p}(x)\widetilde{U}_p(x) + \sum_{k=1}^{p-1}\widetilde{U}_k(x)\cdot(v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}(x))\right| \leqslant$$
$$\leqslant |v_{n+p}(x)\widetilde{U}_p(x)| + \sum_{k=1}^{p-1}|\widetilde{U}_k(x)|\cdot|v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}(x)| <$$
$$< M\varepsilon + \varepsilon\cdot\sum_{k=1}^{p-1}|v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}(x)| = M\varepsilon + \varepsilon\cdot\left|\sum_{k=1}^{p-1} v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}(x)\right| =$$
$$= M\varepsilon + \varepsilon|v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)| < M\varepsilon + 2M\varepsilon < \varepsilon'.$$

Утверждение теоремы следует из критерия Коши. **[:||||:]**

Часть 55

Свойства равномерной сходимости I

1 Признак Дини

Теорема 55.1. *Если члены сходящегося на отрезке* $[a,b]$ *ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *неотрицательны и непрерывны, а сумма этого ряда также является непрерывной функцией, то данный ряд на этом отрезке сходится равномерно.*

Доказательство. Обозначим $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. Поскольку $u_k(x) \geqslant 0$, то $S_n(x) \nearrow S(x)$. А из непрерывности функций $u_k(x)$ на $[a,b]$ следует непрерывность функций $S_n(x)$ на том же отрезке. Теперь зафиксируем $\varepsilon > 0$ и для произвольной точки $x \in [a,b]$ найдем такой номер $N(\varepsilon, x)$, что $0 \leqslant S(x) - S_N(x) < \varepsilon$ (существование этого номера следует из сходимости ряда).

В силу непрерывности функций $S_N(x)$ и $S(x)$ найдется такая окрестность $\mathrm{U}(x) \subset [a,b]$, что $\forall \xi \in \mathrm{U}(x) \Rightarrow 0 \leqslant S(\xi) - S_N(\xi) < \varepsilon$. Покроем теперь весь отрезок $[a,b]$ такими окрестностями. По лемме Гейне-Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{\mathrm{U}_1(x), \mathrm{U}_2(x), \ldots, \mathrm{U}_m(x)\}$. Пусть $\widetilde{N}(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), \ldots, N_m(\varepsilon)\}$, где $N_i(\varepsilon)$ — номер, найденный для окрестности $\mathrm{U}_i(x)$. Тогда при всех $n \geqslant \widetilde{N}(\varepsilon)$ в силу неубывания $S_n(x)$ заведомо выполняется $0 \leqslant S(\xi) - S_n(\xi) < \varepsilon$ для любой точки $\xi \in [a,b]$. А это и гарантирует равномерную сходимость рассматриваемого функционального ряда на $[a,b]$. **[:|||||:]**

2 Непрерывность предельной функции функциональных последовательностей и рядов

Рассмотрим последовательность непрерывных функций, сходящуюся поточечно. Будет ли предельная функция этой последовательности непрерывной? Как оказывается, нет. Рассмотрим в качестве примера последовательность $f_n(x) = \sin^n x$, где $x \in [0, \pi]$. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Получившаяся функция, очевидно, не является непрерывной. Чтобы получить непрерывность, нужно наложить более строгие условия на последовательность:

Теорема 55.2. *Пусть* $\{f_n(x)\} \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f(x)$ *и* $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{E})$. *Тогда* $f(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{E})$.

Доказательство. Из равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N, \, \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

С другой стороны, из непрерывности функций $f_n(x)$:

$$\forall x_0 \in \mathbb{E} \; \exists \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathbb{E} \cap \mathrm{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь зафиксируем произвольное ε и найдем соответствующие N и δ, чтобы оба неравенства выше выполнялись. Тогда

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

[:|||||:]

Заметим, что аналогичную теорему можно сформулировать и для рядов:

Теорема 55.3. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} S(x)$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{E})$. *Тогда* $S(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{E})$.

Доказательство. Сразу можно заметить, что $S_n(x)$ — непрерывная функция (как композиция непрерывных), и воспользоваться теоремой 55.2. **[:|||||:]**

3 Почленный переход к пределу

Теорема 55.4. *Пусть* $\{f_n(x)\} \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f(x)$ *и* $\forall n \in \mathbb{N}$ *существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$, *где* $x_0 \in \mathbb{E}$. *Тогда*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

Доказательство. Из равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in \mathbb{E} \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

По критерию Коши существования предела функции $f_n(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in \mathrm{U}_\delta(x_0) \cap \mathbb{E} \Rightarrow |f_n(x')-f_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь зафиксируем произвольное ε и найдем соответствующие N и δ, чтобы оба неравенства выше выполнялись. Тогда

$$|f(x')-f(x'')| = |f(x')-f_n(x')+f_n(x')-f_n(x'')+f_n(x'')-f(x'')| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x')-f_n(x')|+|f_n(x')-f_n(x'')|+|f_n(x'')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

А тогда по критерию Коши $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Пусть этот предел равен a. Обозначим также $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Тогда

$$|a_n - a| = |a_n - f_n(x)+f_n(x)-f(x)+f(x)-a| \leqslant |f_n(x)-a_n|+|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-a| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Но тогда мы и получаем, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = a.$$

[:|||||:]

Часть 56
Свойства равномерной сходимости II

1 Почленное интегрирование функциональных последовательностей

Теорема 56.1. *Пусть* $\{f_n(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, *причем* $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) \in \Re[a,b]$. *Тогда* $f(x) \in \Re[a,b]$, *причем*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Доказательство. Из равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 : \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_{N_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поскольку $f_{N_0}(x) \in \Re[a,b]$, то $\exists M > 0 : \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_{N_0}(x)| \leqslant M$. Тогда

$$|f(x)| = |f(x) - f_{N_0}(x) + f_{N_0}(x)| \leqslant |f(x) - f_{N_0}(x)| + |f_{N_0}(x)| < M + \varepsilon.$$

Таким образом, мы ограничили $f(x)$. Рассмотрим теперь разбиение отрезка $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Введем колебания функций $f(x)$ и $f_n(x)$ на k-ом отрезке разбиения:

$$\omega_k(f) = \sup_{[x_{k-1},x_k]} |f(x') - f(x'')|,$$
$$\omega_k(f_n) = \sup_{[x_{k-1},x_k]} |f_n(x') - f_n(x'')|.$$

Заметим, что оба этих колебания конечны, т.к. $f(x)$ ограничена, а $f_n(x)$ интегрируема (и значит тоже ограничена). Докажем теперь, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow \omega_k(f) \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{1}$$

Заметим для начала, что $\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$:

$$\begin{aligned}|f(x') - f(x'')| &= |f(x') - f_n(x') + f_n(x') - f_n(x'') + f_n(x'') - f(x'')| \leqslant \\ &\leqslant |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')| < \\ &< \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.\end{aligned}$$

Пусть $m_k = \arg\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$ и $M_k = \arg\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$. Введем последовательности $\{x'_l\}$ и $\{x''_l\}$ такие, что $\lim\limits_{l\to\infty} x'_l = m_k$ и $\lim\limits_{l\to\infty} x''_l = M_k$, причем $\forall l \in \mathbb{N} \Rightarrow x'_l, x''_l \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$|f(x'_l) - f(x''_l)| < \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $l \to \infty$, мы получим в точности неравенство (1). Домножим теперь (1) на Δx_k и просуммируем по всем $k = \overline{1,n}$:

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^n \omega_k(f_n)\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k,$$
$$\overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f_n) - \underline{S}(f_n) + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Здесь разность верхней и нижней сумм Дарбу в правой части меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, т.к. $f_n(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$. Мы показали, что $\overline{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon$, а это и значит, что $f(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$. Докажем теперь, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$. Из равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Но это и означает, что $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_a^b f(x)\,dx$. **[:|||||:]**

Опять-таки, аналогичную теорему сформулируем для рядов.

Теорема 56.2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$ *и* $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$. *Тогда* $S(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$, *причем*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть, пользуясь предыдущей теоремой, последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ (что можно сделать, т.к. $S_n(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$ как сумма интегрируемых функций). **[:|||||:]**

Лемма 56.3 (*О равномерной сходимости первообразной*). *Пусть* $\{f_n(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ *и* $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) \in \mathrm{C}[a,b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^x f_n(t)\,dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Доказательство. Отметим сначала, что по теореме 55.2 функция $f(x) \in \mathrm{C}[a,b] \Rightarrow f(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$. Из равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Теперь:

$$\sup_{[a,b]} \left| \int\limits_a^x f_n(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt \right| = \sup_{[a,b]} \left| \int\limits_a^x (f_n(t) - f(t))\,dt \right| \leqslant \sup_{[a,b]} \int\limits_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt = \varepsilon.$$

По теореме 53.1 получили то, что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

2 Почленное дифференцирование

Теорема 56.4. *Пусть выполнены условия:*

1. $f_n(x)$ *непрерывно дифференцируема для любого* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\exists c \in [a,b] : \{f_n(c)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c)$.
3. $\{f_n'(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.

Тогда $\{f_n(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, *причем* $f'(x) = \varphi(x)$, *т.е.* $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Доказательство. Запишем по критерию Коши сходимость $\{f_n(c)\}$ и $\{f_n'(x)\}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \begin{array}{l} |f_{n+p}(c) - f_n(c)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ |f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}. \end{array}$$

Рассмотрим теперь функцию $F(t) = f_{n+p}(t) - f_n(t)$. Заметим, что для нее выполнены все условия теоремы Лагранжа на $[x,c]$ (или $[c,x]$ — в зависимости от x). Тогда $\exists \xi \in [x,c]$: $F(x) - F(c) = F'(\xi)(x-c)$, а значит $|F(x)| \leqslant |F(c)| + |F'(\xi)| \cdot |x-c|$. Этим и воспользуемся:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(c) - f_n(c)| + |f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)| \cdot |x-c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

А это значит, что по критерию Коши $\exists f(x) : \{f_n(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Заметим, что по теореме 55.2 функция $\varphi(x) \in \mathrm{C}[a,b] \Rightarrow \varphi(x) \in \mathfrak{R}[a,b]$. По формуле Ньютона-Лейбница

$$f_n(x) - f_n(c) = \int\limits_c^x f_n'(t)\,dt. \tag{2}$$

Но по теореме 56.3 (мы можем воспользоваться этой теоремой, т.к. $f_n(x)$ непрерывно дифференцируема)

$$\int\limits_c^x f_n'(t)\,dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_c^x \varphi(t)\,dt. \tag{3}$$

Учитывая теперь, что $\{f_n(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, и переходя к пределу в (2) – (3) при $n \to \infty$:

$$f(x) - f(c) = \int\limits_c^x \varphi(t)\,dt.$$

Заметим теперь, что поскольку $\varphi(x)$ непрерывна, соответствующий интеграл с переменным верхним пределом дифференцируем, и его производная равна подынтегральной функции (вспоминаем прошлый год). Тогда, дифференцируя обе части:

$$f'(x) = \varphi(x).$$

[:||||:]

Как обычно, ровно такую же теорему можно сформулировать и для функциональных рядов.

Теорема 56.5. *Пусть выполнены условия:*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$.

2. $\exists c \in [a,b] : \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c) = S(c)$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$*, причем* $S'(x) = \varphi(x)$*, т.е.* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть $\{S_n(x)\}$ и $\{S_n'(x)\}$ и применить теорему 56.4. **[:||||:]**

Часть 57

Равностепенная непрерывность

Напомним, что множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^m$ называется **замкнутым (плотным в себе)**, если оно содержит все свои предельные точки. Назовем функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ **равностепенно непрерывной** на $\mathbb{E}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x', x'' \in \mathbb{E} : \rho(x', x'') < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Отметим, что по своему определению равностепенная непрерывность функциональной последовательности напоминает равномерную непрерывность функции.

1 Теорема Арцела

Для числовых последовательностей мы формулировали теорему, согласно которой из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Похожее свойство есть и у функциональных последовательностей. Для начала отметим следующее:

Лемма 57.1. *Любая функциональная подпоследовательность равномерно ограниченной (равностепенно непрерывной) функциональной последовательности является равномерно ограниченной (равностепенно непрерывной).*

Доказательство. Достаточно взглянуть на определение равномерной ограниченности (равностепенной непрерывности). Если сначала мы формулировали условие в определении $\forall n \in \mathbb{N}$, то теперь это же условие должно выполняться не для всех номеров, а только для тех, по которым была выделена подпоследовательность. Но множество всех таких номеров $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, поэтому для них все нужные условия выполняются. **[:||||:]**

Теорема 57.2. *Если функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *является равностепенно непрерывной на отрезке* $[a,b]$ *и равномерно ограниченной на нем же, то из нее можно выделить равномерно сходящуюся на* $[a,b]$ *функциональную подпоследовательность.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и выберем такой номер n, что $\frac{b-a}{n} < \delta$. Иными словами, разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков так, чтобы длина каждого не превосходила δ. Обозначим точки разбиения по возрастанию как $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. По определению равностепенной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Рассмотрим теперь числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$. Она ограничена по условию теоремы, а значит по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{1n}(x_1)\}$. Посмотрим на функциональную последовательность $\{f_{1n}(x)\}$ — она равномерно ограничена (как подпоследовательность равномерно ограниченной последовательности) и сходится в точке x_1.

Рассмотрим теперь эту последовательность в точке x_2, т.е. числовую последовательность $\{f_{1n}(x_2)\}$. Эта последовательность ограничена, значит по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{2n}(x_2)\}$. Получившаяся функциональная последовательность $\{f_{2n}(x)\}$ равномерно ограничена и сходится уже в двух точках: x_1 и x_2.

Продолжая этот процесс просеивания неограниченное число раз, получим следующие последовательности:

$$\begin{pmatrix} \boxed{f_{11}(x)} & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) & \ldots \\ f_{21}(x) & \boxed{f_{22}(x)} & \ldots & f_{2n}(x) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & \boxed{f_{nn}(x)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь выделенную диагональную функциональную подпоследовательность $\{f_{nn}(x)\}$. Обозначим ее через $\{\hat{f}_n(x)\}$. Выберем произвольное $x \in [a, b]$. Заметим, что по нашему построению точек x_i на расстоянии, не превосходящем δ, от точки x всегда найдется хотя бы одна точка x_m. В данной точке $\{\hat{f}_n(x)\}$ сходится (начиная с номера m — по нашему алгоритму подпоследовательность $\{f_{mn}(x)\}$ сходится в x_m). Тогда по критерию Коши сходимости числовой последовательности $\{\hat{f}_n(x_m)\}$ и по условию равностепенной непрерывности $\{f_n(x)\}$ (а значит, и $\{\hat{f}_n(x)\}$):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |\hat{f}_{n+p}(x_m) - \hat{f}_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |\hat{f}_n(x') - \hat{f}_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда

$$|\hat{f}_{n+p}(x) - \hat{f}_n(x)| = |\hat{f}_{n+p}(x) - \hat{f}_{n+p}(x_m) + \hat{f}_{n+p}(x_m) - \hat{f}_n(x_m) + \hat{f}_n(x_m) - \hat{f}_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\hat{f}_{n+p}(x) - \hat{f}_{n+p}(x_m)| + |\hat{f}_{n+p}(x_m) - \hat{f}_n(x_m)| + |\hat{f}_n(x_m) - \hat{f}_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Но тогда по критерию Коши последовательность $\{\hat{f}_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. **[:||||:]**

Теорема 57.3. *Вместо равномерной ограниченности функциональной последовательности на $[a, b]$ в теореме 57.2 достаточно потребовать ограниченность только в одной точке $x^* \in [a, b]$.*

Доказательство. По определению равностепенной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x', x'' \in \mathbb{E} : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Это означает, что на любом отрезке, длиной не превосходящей δ, колебание этой функции для произвольного n не превосходит ε. Покроем $[a, b]$ конечным числом отрезков длиной, не превосходящей δ. Пусть этих отрезков n_0. Тогда если рассмотреть колебание функции на всем отрезке $[a, b]$:

$$\begin{aligned}\forall x', x'' \in [a, b] \Rightarrow &|f_n(x') - f_n(x'')| = \\ &= |f_n(x') - f_n(x'_1) + f_n(x'_1) - f_n(x'_2) + f_n(x'_2) - \cdots - f_n(x'_{n_0}) + f_n(x'_{n_0}) - f_n(x'')| \leqslant \\ &\leqslant |f_n(x') - f_n(x'_1)| + |f_n(x'_1) - f_n(x'_2)| + \cdots + |f_n(x'_{n_0}) - f_n(x'')| < \varepsilon + \cdots + \varepsilon = n_0 \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

Здесь точки x'_i как раз выбраны так, чтобы расстояние между ними не превосходило δ. Из ограниченности $f_n(x)$ в x^* получаем, что $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_n(x^*)| \leqslant M$. Но тогда $\forall x \in [a, b]$ и $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_n(x)| \leqslant M + n_0\varepsilon$, т.е. $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена. **[:|||||:]**

Теорема 57.4 (*Достаточный признак равностепенной непрерывности*). *Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, а $\{f'_n(x)\}$ равномерно ограничена на $[a, b]$. Тогда функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $x', x'' \in [a, b]$. Для любой функции $f_n(x)$ на $[x', x'']$ выполняются все условия теоремы Лагранжа. Тогда $\exists \xi_n \in [x', x''] : |f_n(x') - f_n(x'')| = |f'_n(\xi_n)| \cdot |x' - x''| \leqslant M|x' - x''|$, где M ограничивает $\{f'_n(x)\}$. А значит

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} : \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant M|x' - x''| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

По определению равностепенной непрерывности получаем то, что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Часть 58
Степенные ряды I

1 Понятие степенного ряда

Функциональный ряд специального вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_i \in \mathbb{R}$, называется **степенным рядом**. Сразу отметим, что любой степенной ряд сходится абсолютно в точке $x = 0$, однако существуют такие степенные ряды, которые только в этой точке и сходятся. В качестве примера можно привести ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

Рассмотрим временно ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, где $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Его **радиусом сходимости** назовем число (или символ $+\infty$)

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

А **кругом (интервалом) сходимости** назовем множество $\{z \mid |z - z_0| < R\}$. Не ограничивая общности, мы рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad (1)$$

т.е. примем $z_0 = 0$. Теперь исследуем сходимость этого ряда. Зафиксируем z и рассмотрим предел:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

Данный переход возможен при условии, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \neq 0$. Докажем теперь самую важную теорему о степенных рядах, с помощью которой можно исследовать их сходимость.

2 Теорема Коши-Адамара

Теорема 58.1. *Определим z и R так, как это было сделано выше. Тогда*

1. *При $R = 0$ степенной ряд (1) сходится только в точке $z = 0$.*
2. *Если же $R = +\infty$, то степенной ряд (1) сходится абсолютно на всей комплексной плоскости.*
3. *При $|z| < R$ степенной ряд (1) сходится абсолютно, а при $|z| > R$ расходится, причем даже его общий член не стремится к 0.*

Доказательство.

1. Если $R = 0$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, т.е. последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ является неограниченной, а значит неограниченной является и последовательность $|z| \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n z^n|}$ при $z \neq 0$. Но тогда для числового ряда (1) с фиксированным $z \neq 0$ не выполнено необходимое условие сходимости.
2. Если $R = +\infty$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Но тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ при любом $z \in \mathbb{C}$, а значит, ряд сходится абсолютно по признаку Коши.
3. Как и в предыдущем пункте, применяем признак Коши для дроби $\frac{|z|}{R}$.

[:||||:]

Если говорить о вещественных числах, то, упрощенно говоря, в данной теореме доказывается, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно на интервале $(-R, R)$. Заметим, что на концах этого интервала $-R$ и R ряд может как сходиться, так и расходиться. Рассмотрим следующие примеры:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Нетрудно увидеть, что $R = 1$. При $x = -1$ имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится условно по признаку Лейбница. Если же $x = 1$, то получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.
2. Теперь рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ с радиусом сходимости $R = 1$. Если подставить $|x| = 1$, то полученный числовой ряд сходится, т.е. при $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно.

3. В случае $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ с радиусом сходимости $R = 1$, при $x = \pm 1$ данный ряд расходится.

Отметим, однако, что поскольку $|a_n(-R)^n| = |a_n R^n|$, то абсолютная сходимость ряда на одном конце интервала влечет за собой абсолютную сходимость на другом конце.

Лемма 58.2 (***О равномерной сходимости степенного ряда***)**.** *Пусть R — радиус сходимости ряда (1) и $0 < r < R$. Тогда в замкнутом круге $\{z \mid |z| \leqslant r\}$ степенной ряд (1) сходится равномерно.*

Доказательство. Заметим сначала, что в этом замкнутом круге $|a_n z^n| \leqslant |a_n| \cdot r^n$. А числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ сходится по теореме 58.1, т.к. $0 < r < R$. Тогда по признаку Вейерштрасса степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \rightrightarrows$ при $|z| \leqslant r$. **[:|||||:]**

Теорема 58.3 (***Непрерывность суммы степенного ряда***)**.** *Пусть R — радиус сходимости ряда (1). Тогда его сумма $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S(z)$ непрерывна в $\{z \mid |z| < R\}$.*

Доказательство. Напрямую следует из теоремы 55.3 и только что доказанной леммы. **[:|||||:]**

Часть 59
Степенные ряды II

1 Почленное интегрирование степенного ряда

Здесь и далее мы будем рассматривать свойства вещественных степенных рядов, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ где } a_n, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

При этом считаем, что $R \neq 0$.

Теорема 59.1. *Пусть $x \in (-R, R)$. Тогда внутри интервала сходимости степенного ряда (1) можно интегрировать почленно на $[0, x]$ (или на $[x, 0]$ — в зависимости от знака x), причем радиус сходимости полученного ряда совпадает с радиусом сходимости исходного.*

Доказательство. Возможность почленного интегрирования напрямую следует из теоремы 56.1 и леммы 58.2. Теперь найдем новый радиус сходимости. После почленного интегрирования ряда (1) по $[0, x]$ получаем ряд

$$a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \dots + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + \dots$$

Тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a_{n-1}}{n}}} = \frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n}}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_{n-1}}} = 1 \cdot R = R.$$

[:|||||:]

2 Почленное дифференцирование степенного ряда

Теорема 59.2. *Пусть R — радиус сходимости ряда (1). Тогда внутри интервала сходимости $(-R, R)$ степенной ряд можно дифференцировать почленно, причем радиус сходимости не изменится.*

Доказательство. Возможность почленного дифференцирования напрямую следует из теоремы 56.4 и леммы 58.2. Теперь найдем новый радиус сходимости. После почленного дифференцирования ряда (1) по x получаем ряд

$$a_1 + 2a_2x + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \ldots$$

Тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)a_{n+1}}} = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R.$$

[:|||||:]

Следствие 59.3. *Внутри интервала сходимости степенной ряд можно дифференцировать бесконечное число раз. Причем степенной ряд, полученный после n-кратного дифференцирования, сходится к n-ой производной суммы исходного степенного ряда.*

3 Разложение функций в степенные ряды

Будем говорить, что $f(x)$ **раскладывается в степенной ряд** на $(-R, R)$, если существует такой степенной ряд, который имеет сумму $f(x)$ на $(-R, R)$.

Утверждение 59.4. *Если функция $f(x)$ разложима на $(-R, R)$, то она на этом интервале является бесконечно дифференцируемой.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из следствия 59.3. **[:|||||:]**

Утверждение 59.5. *Если $f(x)$ можно разложить на $(-R, R)$, то это разложение единственно.*

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ на $(-R, R)$, причем $\exists k_i : a_{k_i} \neq b_{k_i}$, где k_i — некоторые m точек. Тогда

$$0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n.$$

Получаем, что многочлен с m ненулевыми коэффициентами (и некоторой степени N) тождественно равен нулю. Но у многочлена любой степени не может быть более, чем счетное число корней, а здесь имеем равенство на всем интервале $(-R, R)$, т.е. должно быть континуум корней. Получили противоречие, т.е. $\forall k \Rightarrow a_k = b_k$. **[:|||||:]**

Заметим, что нам уже известно это самое единственное разложение. Это не что иное, как разложение в ряд Тейлора, т.е. ряд, в котором $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Приведем теперь пример, показывающий, что обратное утверждение к 59.4 неверно, т.е. ***бесконечно дифференцируемая функция не обязательно раскладывается в ряд***. Данная функция называется *примером Коши*:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Отметим сначала, что $f^{(n)}(x) = P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, где $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ — некоторый многочлен от $\frac{1}{x}$ степени $3n$. Теперь докажем по индукции, что $f^{(n)}(0) = 0$. При $n = 1$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - f(0)}{x} = \lim_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0.$$

Пусть $f^{(n)}(0) = 0$. Докажем теперь утверждение для $n = n + 1$:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} P_{3n+1}(x)e^{-x^2} = 0,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{e^{x^2}} = 0$, а таких слагаемых конечное число n.

Теперь, если попробовать разложить $f(x)$ в ряд Тейлора, то получится, что $f(x) \equiv 0$, поскольку производные всех порядков этой функции равны 0. Но по своему определению $f(x) \not\equiv 0$. Таким образом, данная функция не раскладывается в ряд.

Часть 60

Мера Жордана на плоскости и в пространстве

1 Определения

Рассмотрим произвольное множество $A \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 1$. **Замыканием** множества A будем называть множество всех его предельных точек $\bar{A}$. Множество всех внутренних точек обозначим как $\operatorname{int} A$. Тогда **границу** множества можно определить как $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$. О внутренних и предельных точках, границе множества читатель может прочесть в лекциях прошлого года. Обратите внимание, что в нынешнем определении границы множества мы не включаем изолированные точки (как это делали в том году). В принципе их можно как включать, так и нет — на дальнейшей теории это никак не отразится.

Многоугольником будем называть часть плоскости, ограниченной простой замкнутой ломаной. **Многоугольной фигурой** на плоскости мы будем называть конечное объединение многоугольников. Для многоугольника мы со школы знаем понятие **площади**. Одним из свойств многоугольной фигуры P является равенство $\mu(P) = \mu(\bar{P}) = \mu(\operatorname{int}(P))$.

Плоской фигурой назовем ограниченное множество точек плоскости. Рассмотрим плоскую фигуру F и произвольные многоугольные фигуры P и Q такие, что $P \subset F \subset Q$. Множество $\{\mu(P) \mid P \subset F\}$ ограничено сверху числом $\mu(Q)$, а множество $\{\mu(Q) \mid Q \supset F\}$ ограничено снизу нулем. Тогда

$$\exists \sup_{P\subset F} \mu(P) = \mu_*(F),$$
$$\exists \inf_{Q\supset F} \mu(Q) = \mu^*(F).$$

Данные величины называются соответственно **нижней** и **верхней** площадью фигуры F. По определению $\mu_*(F) \leqslant \mu^*(F)$. Будем называть фигуру **квадрируемой** (имеющей площадь) по Жордану, если $\mu_*(F) = \mu^*(F)$. Соответственно, ее площадь определим как $\mu(F) = \mu_*(F) = \mu^*(F)$.

Будем говорить, что фигура F имеет **нулевую площадь**, если она может быть вписана в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists P : \mu(P) < \varepsilon$ и $P \supset F$.

2 Критерии квадрируемости

Теорема 60.1 (***Первый критерий квадрируемости***)**.** *Плоская фигура F квадрируема т.и.т.т., когда $\forall \varepsilon > 0$ существуют такие многоугольные фигуры P и Q, что $\mu(Q)-\mu(P) < \varepsilon$, причем $P \subset F \subset Q$.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  Если F квадрируема, то $\mu^*(F) = \mu_*(F)$. По определению инфимума и супремума

  $$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \mu^*(F) \leqslant \mu(Q) < \mu^*(F) + \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \mu_*(F) - \dfrac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \leqslant \mu_*(F). \end{array}$$

  Вычитая из первого неравенства второе, получаем $0 \leqslant \mu(Q) - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

- ***Достаточность.***

  По условию $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. С другой стороны, по определению $\mu_*(F)$ и $\mu^*(F)$:

  $$\mu(P) \leqslant \mu_*(F) \leqslant \mu^*(F) \leqslant \mu(Q) \Rightarrow \mu^*(F) - \mu_*(F) \leqslant \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

  Но тогда, в силу произвольности ε, можно заключить, что $\mu_*(F) = \mu^*(F)$.

[:||||:]

Теорема 60.2 (***Второй критерий квадрируемости***)**.** *Плоская фигура F квадрируема т.и.т.т., когда $\forall \varepsilon > 0$ существуют такие **квадрируемые** фигуры G и H, что $\mu(H)-\mu(G) < \varepsilon$, причем $G \subset F \subset H$.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  В предыдущей теореме мы доказали необходимость для многоугольных фигур, т.е. доказали, что существуют многоугольные фигуры, удовлетворяющие заданному условию. Но многоугольные фигуры — квадрируемые, а значит необходимость уже доказана.

- ***Достаточность.***

По предыдущей теореме существуют такие многоугольные фигуры P и Q, что $P \subset G \subset F \subset H \subset Q$, причем

$$\mu(G) - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{4},$$
$$\mu(Q) - \mu(H) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

По условию $\mu(H) - \mu(G) < \frac{\varepsilon}{2}$ (для красоты сделаем ε таким). Тогда имеем

$$\mu(Q) - \mu(P) = \mu(Q) - \mu(H) + \mu(H) - \mu(G) + \mu(G) - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

А значит, по предыдущей теореме F квадрируема.

[:|||||:]

Теорема 60.3 (*Критерий квадрируемости в терминах границы*). *F квадрируема т.и.т.т., когда $\mu(\partial F) = 0$.*

Данная теорема приводится без доказательства.

Отметим, что аналогично понятию квадрируемости в пространстве $\mathbb{R}^3$ вводится понятие **кубируемости**, а в пространствах высших порядков более общее понятие **измеримости по Жордану**.

Измеримость по Жордану обладает свойством **конечной аддитивности**, т.е. если $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$, а для любых $i \neq j$ выполняется $F_i \cap F_j = \varnothing$, причем все F_i измеримы, то и F измерима, причем

$$\mu(F) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i).$$

Однако важно понимать, что **для счетного числа фигур данное свойство, вообще говоря, не выполняется**. Например, рассмотрим $F = Q_{[0,1]\times[0,1]}$ — множество всех точек с рациональными координатами из квадрата $[0,1] \times [0,1]$. Если рассмотреть любую точку этой фигуры, то мы не сможем в нее вписать никакую другую фигуру, поэтому площадь вписанной в эту точку «фигуры» равна 0. Суммируя теперь по всем точкам, мы получаем, что нижняя площадь равна 0.

С другой стороны, какую бы мы маленькую окрестность ни взяли, в этой окрестности любой точки всегда найдется другая точка с рациональными координатами. Поэтому, чтобы описать F, нужно взять весь квадрат $[0,1] \times [0,1]$, площадь которого равна 1. Таким образом, нижняя и верхняя площади не совпадают, а значит, F не квадрируема.

Часть 61

Понятие двойного интеграла

1 Определения

Рассмотрим квадрируемый компакт (т.е. замкнутую и ограниченную квадрируемую фигуру), разбитый на конечное число непересекающихся компактов. Иными словами, представим данный компакт K в виде $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \sigma_i$, причем для любых $i \neq j \Rightarrow \sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$. σ_i назовем **ячейкой разбиения**. Ее площадь обозначим как $\Delta(\sigma_i)$, а также введем **максимальный диаметр ячеек разбиения** $d(K)$, который определим как

$$d(K) = \max_{i=\overline{1,n}} d(\sigma_i), \text{ где}$$
$$d(\sigma_i) = \sup_{M_1, M_2 \in \sigma_i} \rho(M_1, M_2).$$

Рассмотрим некоторое разбиение Γ. Его **измельчением** Γ' (обозначение $\Gamma' \geqslant \Gamma$) назовем такое разбиение, что любая ячейка разбиения Γ либо является ячейкой разбиения Γ', либо является объединением некоторых ячеек разбиения Γ'.

Выберем в каждой σ_i точку $\gamma_i = (\xi_i, \eta_i) \in \sigma_i$. Составим так называемое **отмеченное разбиение** $T_\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\sigma_i \oplus \{\gamma_i\})$. Иными словами, мы просто отметили во всех ячейках разбиения по произвольной точке и зафиксировали их в разбиении. Тогда **интегральной суммой** от функции f этого разбиения назовем величину

$$S(f, T_\gamma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta(\sigma_i).$$

Наконец, число

$$I = \lim_{d(K) \to 0} S(f, T_\gamma)$$

называется **двойным интегралом** от функции f по квадрируемому компакту K. Отметим, что I **не зависит** от выбора точек γ_i, а также от самого способа разбиения на ячейки. Обозначать двойной интеграл будем так:

$$\iint\limits_K f(x, y)\, dxdy.$$

Чтобы эти определения воспринимались легче, вспомним, что почти такие же мы давали, когда вводили понятие одиночного интеграла. Роль ячеек разбиения там играли отрезки разбиения, которые тоже не пересекались (только по границам, как и здесь). Вместо площади ячеек мы пользовались длиной этих отрезков, а максимальный диаметр разбиения определялся так же, только теперь нам еще нужно определять диаметр одной ячейки (в случае отрезка это была просто его длина) как максимальное расстояние между двумя точками из этой ячейки.

Измельчение также легко представляется: в одномерном случае мы могли добавить точки к заданному разбиению и получить новое измельчение. Теперь же мы можем взять ячейку разбиения (которая сама является компактом как часть компакта) и разбить на более мелкие ячейки, тем самым получив измельчение.

Интегральная сумма опять-таки определяется аналогично: если раньше мы фиксировали точки γ_i на каждом отрезке разбиения, то теперь фиксируем точки в каждой ячейке разбиения. Ну и соответственно, в двойном интеграле мы устремляем диаметр разбиения к нулю, а значит, разбиваем компакт на много-много маленьких ячеек, как разбивали раньше отрезок на много-много маленьких отрезочков.

Проницательный читатель заметит, что геометрический смысл двойного интеграла состоит в том, что если функция неотрицательна на рассматриваемом множестве $\mathbb{E}$, то двойной интеграл по этому множеству равен объему фигуры, ограниченной $\mathbb{E}$ и графиком функции, построенным на $\mathbb{E}$.

Следующее утверждение справедливо не только для двойных интегралов, но и для интегралов большей кратности (о том, как вводится мера Жордана в таких случаях, будет рассказано позже).

Утверждение 61.1. *Пусть* $\mathbb{E} \in \mathbb{R}^n$ *и* $\mu(\mathbb{E}) = 0$. *Тогда для любой функции* f *выполняется*

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f(\bar{x})\, d\bar{x} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим интегральную сумму

$$S(f, T_\gamma) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i) \cdot \underbrace{\mu(\sigma_i)}_{=0} = 0.$$

Но тогда, устремляя диаметр разбиения к 0

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f(\bar{x})\, d\bar{x} = \lim_{d(K)\to 0} S(f, T_\gamma) = 0.$$

[:||||:]

Опять-таки, следующее утверждение справедливо для интегралов любой кратности:

Утверждение 61.2. *Если существует* $\int\limits_{\mathbb{E}} f(\bar{x})\, d\bar{x}$*, то* $f(\bar{x})$ *ограничена на* $\operatorname{int}\mathbb{E}$.

Будем говорить, что функция f **интегрируема по множеству** $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$, если она ограничена на нем и $\exists \int\limits_{\mathbb{E}} f(\bar{x})\, d\bar{x}$. Обозначать это будем уже привычной записью $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{E})$.

Наконец, напомним понятие **колебания** функции f на множестве $\mathbb{E}$:

$$\omega(f, \mathbb{E}) = \sup_{\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{E}} |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = \sup_{\mathbb{E}} f - \inf_{\mathbb{E}} f.$$

2 Критерий интегрируемости

Теперь мы снова возвращаемся к рассмотрению двойных интегралов.

Теорема 61.3. *Пусть функция* f *ограничена на измеримом множестве* $\mathbb{E}$. *Тогда* f *интегрируема на* $\mathbb{E}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall T = \{\sigma_i\}_{i=1}^{n} : d(T) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \sigma_i)\Delta(\sigma_i) < \varepsilon.$$

Или же, в предельной формулировке

$$\lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \sigma_i)\Delta(\sigma_i) = 0.$$

Доказательство. У этой теоремы ровно такое же доказательство, как и у аналогичной теоремы для одномерного случая (т.е. когда $\mathbb{E} = [a, b]$), которую мы рассматривали в прошлом году. **[:||||:]**

Однако этот же критерий можно записать немного в другом виде. Если f ограничена на $\mathbb{E}$, то для любого разбиения $T = \{\sigma_i\}_{i=1}^n$ существуют $\inf\limits_{\sigma_i} f = m_i$ и $\sup\limits_{\sigma_i} f = M_i$. Величины

$$\underline{S}(f,T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta(\sigma_i),$$
$$\overline{S}(f,T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta(\sigma_i)$$

называются соответственно **нижней и верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению T. Заметим теперь, что

$$\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta(\sigma_i) = \sum_{i=1}^n \omega(f,\sigma_i)\Delta(\sigma_i).$$

Тогда описанный выше критерий можно переформулировать так:

Теорема 61.4. *Пусть f ограничена на измеримом множестве $\mathbb{E}$. Тогда $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{E})$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : d(T) < \delta \Rightarrow \overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) < \varepsilon.$$

Часть 62
Свойства двойного интеграла Римана

1 Интегрируемость непрерывной функции и критерий Лебега

Теорема 62.1. *Пусть K — квадрируемый компакт, а $f(x,y)$ непрерывна на K. Тогда $f(x,y)$ интегрируема по данному множеству.*

Доказательство. Поскольку f непрерывна на компакте K, то по первой теореме Вейерштрасса она ограничена на K. Теперь если $\mu(K) = 0$, то по теореме 61.1 $\iint\limits_K f(x,y)\,dxdy = 0$.

Пусть теперь $\mu(K) \neq 0$. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на K (поскольку K — компакт). Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \bar{x}, \bar{y} \in K : \rho(\bar{x},\bar{y}) < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \frac{\varepsilon}{\mu(K)}.$$

Рассмотрим теперь разность сумм Дарбу:

$$\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta(\sigma_i) = \sum_{i=1}^n (f(\bar{\xi}_i') - f(\bar{\xi}_i''))\Delta(\sigma_i).$$

Здесь мы нашли такие $\bar{\xi}_i'$ и $\bar{\xi}_i''$, что $f(\bar{\xi}_i') = \sup\limits_{\sigma_i} f$ и $f(\bar{\xi}_i'') = \inf\limits_{\sigma_i} f$. Отметим, что мы можем это сделать по второй теореме Вейерштрасса. Выше мы ограничили величину $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})|$ для любых $\bar{x}, \bar{y}$ из K. Воспользуемся этой оценкой:

$$\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) < \frac{\varepsilon}{\mu(K)} \sum_{i=1}^n \Delta(\sigma_i) = \varepsilon.$$

Значит, по теореме 61.4 $f(x,y)$ интегрируема по K. **[:||||:]**

Теорема 62.2 (***Теорема Лебега***). *Пусть f ограничена на $\mathbb{E}$, а множество точек разрыва данной функции имеет меру 0. Тогда функция f интегрируема на $\mathbb{E}$.*

2 Основные свойства двойного интеграла

Свойства, описанные ниже, практически не отличаются от таковых для однократных интегралов.

1. ***Аддитивность.***

   Теорема 62.3. *Пусть σ квадрируема и $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, причем $\operatorname{int}\sigma_1 \cap \operatorname{int}\sigma_2 = \varnothing$. Пусть также $f(x,y) \in \Re(\sigma)$. Тогда $f(x,y) \in \Re(\sigma_1)$ и $f(x,y) \in \Re(\sigma_2)$, причем*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} f(x,y)\,dxdy.$$

2. ***Линейность.***

   Теорема 62.4. *Пусть $f, g \in \Re(\sigma)$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $(\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)) \in \Re(\sigma)$, причем*

$$\iint\limits_{\sigma} (\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy \pm \beta \iint\limits_{\sigma} g(x,y)\,dxdy.$$

3. ***Монотонность.***

   Теорема 62.5. *Пусть $f, g \in \Re(\sigma)$ и $\forall (x,y) \in \sigma \Rightarrow f(x,y) \leqslant g(x,y)$. Тогда*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint\limits_{\sigma} g(x,y)\,dxdy.$$

4. ***Интегрируемость модуля.***

   Теорема 62.6. *Пусть $f(x,y) \in \Re(\sigma)$. Тогда $|f(x,y)| \in \Re(\sigma)$, причем*

$$\left| \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy \right| \leqslant \iint\limits_{\sigma} |f(x,y)|\,dxdy.$$

   Отметим, что ***обратное неверно!*** Читатель может вспомнить прошлогодний пример для одномерного случая с модифицированной функцией Дирихле.

5. ***Интегрируемость произведения.***

   Теорема 62.7. *Пусть $f, g \in \Re(\sigma)$. Тогда и $f \cdot g \in \Re(\sigma)$.*

   Разумеется, как и в одномерном случае, ***интеграл произведения не равен произведению интегралов***.

6. ***О среднем.***

Теорема 62.8. *Пусть* $f(x,y) \in \mathfrak{R}(\sigma)$ *и* $\forall (x,y) \in \sigma \Rightarrow m \leqslant f(x,y) \leqslant M$. *Тогда*

$$m \leqslant \frac{1}{\mu(\sigma)} \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy \leqslant M.$$

Если же функция f *непрерывна, то*

$$\exists (\xi,\eta) \in \sigma : f(\xi,\eta) = \frac{1}{\mu(\sigma)} \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy$$

и тогда

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta) \iint\limits_{\sigma} dxdy.$$

Следует отметить, что $\iint\limits_{\sigma} dxdy$ равен площади области σ.

3 Сведение двойного интеграла к повторному

Сначала мы рассмотрим случай прямоугольной области интегрирования.

Теорема 62.9. *Пусть* $f(x,y) \in \mathfrak{R}(K)$, *где* $K = [a,b] \times [c,d]$, *и для любого* $\widetilde{x} \in [a,b]$ *существует интеграл* $I(\widetilde{x}) = \int\limits_c^d f(\widetilde{x},y)\,dy$. *Тогда*

$$\exists \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \iint\limits_K f(x,y)\,dxdy.$$

Доказательство. Произведем разбиение $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ и $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_l = d$. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Наконец, пусть $R_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$. Ввиду интегрируемости f на K

$$\begin{matrix} \exists m_{kj} = \inf\limits_{R_{kj}} f(x,y), \\ \exists M_{kj} = \sup\limits_{R_{kj}} f(x,y), \end{matrix} \Rightarrow \forall (x,y) \in R_{kj} \Rightarrow m_{kj} \leqslant f(x,y) \leqslant M_{kj}.$$

Теперь проинтегрируем последнее неравенство по y на $[y_{j-1}, y_j]$:

$$\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} m_{kj}\,dy \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} M_{kj}\,dy,$$

$$m_{kj}\Delta y_j \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leqslant M_{kj}\Delta y_j.$$

Данное неравенство просуммируем по $j = \overline{1, l}$ и $k = \overline{1, n}$, домножая каждый раз на Δx_k. В качестве точки на k-ом отрезке разбиения по x выберем некоторое ξ_k:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} m_{kj}\Delta y_j \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \sum_{j=1}^{l}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_k, y)\,dy \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} M_{kj}\Delta y_j \Delta x_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} m_{kj}\Delta y_j \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} M_{kj}\Delta y_j \Delta x_k.$$

Устремим теперь диаметр разбиения к 0. Справа и слева при этом получаем $\iint\limits_K f(x,y)\,dxdy$. Тогда по теореме о двух милиционерах

$$\lim_{d(K)\to 0}\sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k = \iint\limits_K f(x,y)\,dxdy.$$

С другой стороны, мы рассматриваем интегральную сумму, поэтому при устремлении диаметра разбиения к 0:

$$\lim_{d(K)\to 0}\sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b I(x)\,dx.$$

[:|||||:]

Отметим, что переменные x и y в этой теореме можно поменять местами. Иными словами, если $\exists I(\widetilde{y}) = \int\limits_a^b f(x, \widetilde{y})\,dx$, то

$$\exists \int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \iint\limits_K f(x,y)\,dxdy.$$

Запись $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ обычно используется вместо $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$.

Теперь рассмотрим более общий случай:

Теорема 62.10. *Пусть K — квадрируемый компакт, а любая прямая $x = \widetilde{x}$ пересекает этот компакт либо по целому отрезку $[y_1(\widetilde{x}), y_2(\widetilde{x})]$, либо в двух точках $(\widetilde{x}, y_1(\widetilde{x}))$ и $(\widetilde{x}, y_2(\widetilde{x}))$. Обозначим за x_1 самую крайнюю точку слева в K, а за x_2 самую крайнюю точку справа.*

Пусть $f(x,y) \in \mathfrak{R}(K)$ и $\forall \widetilde{x} \in [x_1, x_2]$ существует $I(\widetilde{x}) = \int\limits_{y_1(\widetilde{x})}^{y_2(\widetilde{x})} f(\widetilde{x}, y)\,dy$. Тогда

$$\exists \int\limits_{x_1}^{x_2} I(x)\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \iint\limits_K f(x,y)\,dxdy.$$

Доказательство. Заключим область K в прямоугольник R и рассмотрим такую функцию:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in K, \\ 0, & (x,y) \in R \setminus K. \end{cases}$$

Отметим сначала, что $F(x,y) \in \mathfrak{R}(R)$. Действительно, данная функция может рваться только в точках $(x,y) \in \partial K$. Но в силу квадрируемости фигуры K и критерия 60.3 $\mu(\partial K) = 0$. Но тогда $F(x,y) \in \mathfrak{R}(R)$ по теореме 62.2 (критерий Лебега). В итоге, применяя теорему 62.9 к функции $F(x,y)$, получаем требуемое. **[:||||:]**

Опять-таки, переменные x и y можно поменять местами. Отметим также, что если рассматриваемая область K не удовлетворяет условию теоремы (что каждая вертикальная прямая пересекает ее либо по отрезку, либо по двум точками), то обычно эту область разбивают на конечное число областей, каждая из которых уже удовлетворяет описанному свойству, а затем пользуются аддитивностью интеграла.

Часть 63

Тройные и n-кратные интегралы

1 Измеримость фигуры в $\mathbb{R}^n$

Будем называть **n-мерным прямоугольным параллелепипедом** фигуру $R = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_i \leqslant x \leqslant b_i,\ i = \overline{1,n}\} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Ее **диаметром** назовем величину

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

Элементарной фигурой Φ назовем объединение конечного числа параллелепипедов без общих внутренних точек. Со школы мы умеем считать **объем** трехмерного параллелепипеда как $V = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$. Для n-мерного случая объем параллелепипеда R вводится аналогично:

$$V(R) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Введем также понятие **нижнего** и **верхнего** n-мерного объема (по аналогии с нижней и верхней площадями) произвольной фигуры D:

$$\exists \sup_{\Phi \subset D} V(\Phi) = V_*(D),$$
$$\exists \inf_{\Phi \supset D} V(\Phi) = V^*(D).$$

Будем говорить, что $D \subset \mathbb{R}^n$ **измерима по Жордану**, если $V_*(D) = V^*(D)$. В этом случае D имеет n-мерный объем $V(D) = V_*(D) = V^*(D)$.

Поверхностью (многообразием) нулевого объема мы будем называть область, лежащую в элементарной фигуре сколь угодно малого объема, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \Phi : V(\Phi) < \varepsilon$ и $\Phi \supset D$.

Опять-таки, по аналогии с площадями можно сформулировать несколько критериев измеримости:

Утверждение 63.1. *Фигура D измерима тогда и только тогда, когда существуют элементарные фигуры Φ_1 и Φ_2: $\Phi_1 \subset D \subset \Phi_2$, такие, что $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow V(\Phi_2) - V(\Phi_1) < \varepsilon$.*

Утверждение 63.2. *Фигура D измерима тогда и только тогда, когда ее граница представляет из себя поверхность нулевого объема.*

Выберем теперь n-мерный прямоугольный параллелепипед R и разобьем каждое из его ребер $(n-1)$-мерными гиперплоскостями. В результате весь R разобьется на частичные n-мерные параллелепипеды. Выберем в каждом из них точку $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)})$. Составим теперь интегральную сумму, где объем частичного параллелепипеда $R_{i_1,\dots,i_n}$ обозначим как $\Delta R_{i_1,\dots,i_n}$, а количество областей, на которые разбился параллелепипед гиперплоскостями, пересекающими i-ое ребро, как l_i. В итоге, получаем

$$\sum_{i_1=1}^{l_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{l_n} f(\xi_1^{(i_1,\dots,i_n)},\dots,\xi_n^{(i_1,\dots,i_n)})\Delta R_{i_1,\dots,i_n} \xrightarrow[d\to 0]{} \int\limits_R\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n.$$

Сформулируем теперь обобщение на n-мерный случай теоремы 62.10.

Теорема 63.3 (***Сведение n-кратного интеграла к повторному***). *Пусть любая прямая $x_1=\widetilde{x}$ пересекает границу области D либо по целому отрезку, либо не более, чем в двух точках $a(x_2,\dots,x_n)$ и $b(x_2,\dots,x_n)$, где $a(x_2,\dots,x_n)\leqslant b(x_2,\dots,x_n)$, и функция f интегрируема в области D, а также допускает существование для любой точки $(x_2,\dots,x_n)\in\hat{D}$ (где $\hat{D}$ — проекция области D на координатную гиперплоскость $O_{x_2\dots x_n}$) однократного интеграла*

$$I(x_2,\dots,x_n)=\int\limits_{a(x_2,\dots,x_n)}^{b(x_2,\dots,x_n)} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1.$$

Тогда существует $(n-1)$-кратный интеграл

$$\int\limits_{\hat{D}}\cdots\int dx_2\dots dx_n\int\limits_{a(x_2,\dots,x_n)}^{b(x_2,\dots,x_n)} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1$$

по области $\hat{D}$ и справедлива формула повторного интегрирования

$$\int\limits_D\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=\int\limits_{\hat{D}}\cdots\int dx_2\dots dx_n\int\limits_{a(x_2,\dots,x_n)}^{b(x_2,\dots,x_n)} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1.$$

Доказательство данной теоремы аналогично таковому в теореме 62.10. Отметим также, что в сформулированной теореме в роли x_1 может выступать любая из переменных $x_2,\dots,x_n$.

2 Замена переменных в n-кратном интеграле

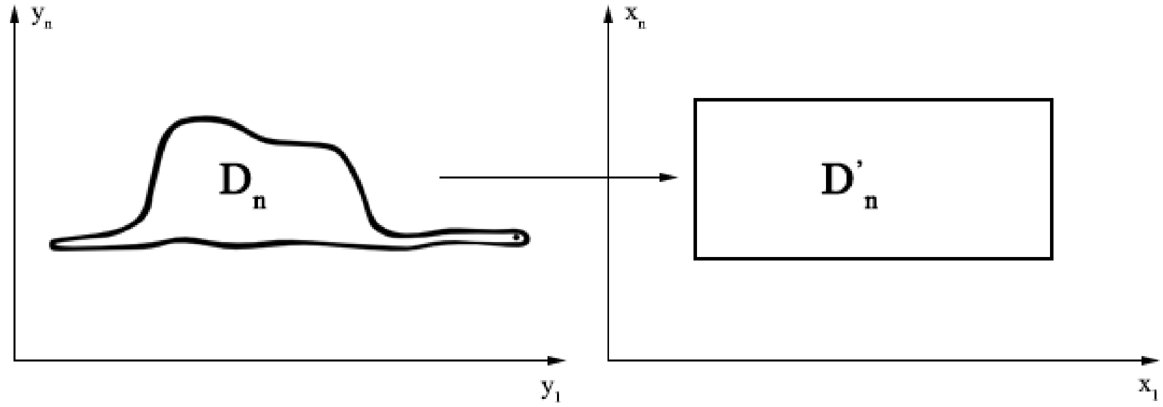
Рассмотрим n-кратный интеграл

$$\int\limits_{D_n\subset\mathbb{R}^n}\cdots\int f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n. \tag{1}$$

Предположим, что

$$\begin{cases} y_1=\psi_1(x_1,\dots,x_n),\\ \quad\vdots\\ y_n=\psi_n(x_1,\dots,x_n).\end{cases}$$

Иными словами, наша область представима в виде $D_n=\psi(D_n')$. Если область D_n' «хорошая» (как на рисунке ниже), то для взятия интеграла (1) было бы удобно перейти к новой области.



Пусть выполнены следующие условия:

1. Все $\psi_i(\bar{x})$, $i = \overline{1,n}$ являются непрерывно дифференцируемыми в D'_n.
2. Якобиан отличен от нуля в D'_n:

$$|J| = \left|\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в } D'_n.$$

3. Отображение ψ является инъективным, т.е. $\psi(u) = \psi(v) \Leftrightarrow u = v$.

Отображение, удовлетворяющее данным условиям, называется **регулярным**. Отметим, что необходимым условием регулярности является в частности существование обратного отображения (в силу инъективности) $\psi^{-1}\colon D_n \mapsto D'_n$.

Теорема 63.4. *Если отображение $D_n = \psi(D'_n)$ является регулярным, то при существовании интеграла (1) справедлива формула замены переменных*

$$\boxed{\int\limits_{D_n}\cdots\int f(\bar{y})\,d\bar{y} = \int\limits_{D'_n}\cdots\int f(\psi(\bar{x}))\cdot\left|\frac{D(\bar{y})}{D(\bar{x})}\right|d\bar{x}.} \tag{2}$$

Важно отметить, что условие регулярности в данной теореме несколько строгое. В условии теоремы якобиан $|J|$ может принимать нулевые значения на множестве S нулевого объема.

Чтобы это показать, заключим S в последовательность элементарных фигур $\{C_k\}$ таких, что $V(C_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Тогда

$$\int\limits_{\psi^{-1}(D'_n\setminus C_k)}\cdots\int f(\bar{y})\,d\bar{y} = \int\limits_{D'_n\setminus C_k}\cdots\int f(\psi(\bar{x}))|J|\,d\bar{x}.$$

Теперь, переходя к пределу при $k\to\infty$, мы получаем в точности (2).

Осталось лишь понять, в чем заключается геометрический смысл якобиана $|J|$. Предположим, что $f(y)\equiv 1$. Тогда в левой части (2) стоит n-мерный объем D_n. В правой части имеем практически то же самое, но с домножением на $|J|$. Таким образом, $\left|\frac{D(\bar{y})}{D(\bar{x})}\right|$ показывает коэффициент сжатия (растяжения) области D_n в новых (вообще говоря, криволинейных) координатах $(x_1,\ldots,x_n)$.

3 Сферические и цилиндрические системы координат

Прежде всего вспомним, что *полярная система координат* задается следующими преобразованиями координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \text{, где } r \geqslant 0 \text{ и } 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Данная система координат зачастую очень удобна при работе на плоскости. В трехмерном случае помимо классической декартовой системы распространены следующие:

- ***Сферическая система координат.***

  Переход к данной системе осуществляется с помощью следующих преобразований:

  $$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi, \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, \\ z = r\sin\psi. \end{cases}$$

  Здесь $r \geqslant 0$ — длина радиус-вектора, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ — широта, а $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ — долгота. Именно в такой системе координат задаются точки на глобусе (без учета радиус-вектора, разумеется). Отметим, что при данной замене $|J| = r^2\cos\psi$.

- ***Цилиндрическая система координат.***

  В данной системе каждая точка задается посредством r (радиус от оси Oz), φ (угол поворота) и z (расстояние по оси аппликат). Иными словами, это система координат, в которой координата z остается прежней, а x и y преобразуются в полярные координаты, т.е. преобразование такое:

  $$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

  При этом $|J| = r$.

Наконец, в n-мерном случае также можно использовать сферическую систему координат, т.е. отображение $\{x_1, \ldots, x_n\} \mapsto \{r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = r\sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Якобиан же тогда равен $|J| = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2}$.

Часть 64

Несобственные кратные интегралы I

Предположим теперь, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто и, быть может, не ограничено, а функция $f(\bar{x})$ интегрируема по любому компакту из множества D. Подобно тому, как мы переходили от однократного интеграла по конечному отрезку к несобственному интегралу по бесконечному отрезку, мы переходим к интегралу по неограниченному множеству.

Будем говорить, что последовательность множеств $\{D_n\}$ **монотонно исчерпывает** $D \subset \mathbb{R}^n$, если

1. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{D}_n \subset D_{n+1}$, где $\overline{D}_n$ — *замыкание* множества D_n (т.е. множество с добавленными к нему предельными точками).

2. $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$.

В качестве примера такой последовательности можно привести $D_n = \{\bar{x} \subset D \mid \rho(0,x) < n,\ \rho(\bar{x}, \partial D) \geqslant \frac{1}{n}\}$.

Предположим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество D_n измеримо по Жордану и существует

$$a_n = \int\limits_{D_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1, \ldots, x_n)\, d\bar{x}.$$

Если для любой последовательности $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающей область D, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, и он не зависит от выбора $\{D_n\}$, то мы будем говорить, что функция f **несобственно интегрируема** по области D и несобственный интеграл

$$\int\limits_{D}\!\!\cdots\!\int f(\bar{x})\, d\bar{x} = \lim_{n\to\infty} a_n \tag{1}$$

сходится.

Вспомним теперь, как мы определяли несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx$ в одномерном случае. Мы полагали его равным значению $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{n} f(x)\, dx$. Иными словами, в одномерном случае мы имеем $a_n = \int\limits_0^{n} f(x)\, dx$, а в качестве последовательности $\{D_n\}$ мы рассматривали только $D_n = n$ (данная последовательность, очевидно, монотонно исчерпывает луч $[0, \infty)$).

Теорема 64.1 (***Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции***). *Если подынтегральная функция $f(\bar{x}) \geqslant 0$, то для сходимости несобственного интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность $\{a_n\}$ была бы ограничена на хотя бы одной последовательности множеств $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающей множество D.*

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  Поскольку $f(\bar{x}) \geqslant 0$ и $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$, то $\{a_n\} \nearrow$. По условию теоремы $\{a_n\}$ сходится. Но по теореме Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности для сходимости $\{a_n\}$ необходима ее ограниченность.

- ***Достаточность.***

  Пусть теперь последовательность $\{a_n\} = \{\int\limits_{D_n}\!\cdots\!\int f(\bar{x})\, d\bar{x}\}$ ограничена на некоторой последовательности множеств $\{D_n\}$. В силу $f(\bar{x}) \geqslant 0$ она является неубывающей, а значит по теореме Вейерштрасса сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = I$. Рассмотрим другую произвольную монотонно исчерпывающую D последовательность $\{D'_n\}$. Пусть $\{a'_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} I'$.

Зафиксируем произвольный номер n. Поскольку $\{D_n\}$ монотонно исчерпывает D, то по определению существует такое m, что $D'_n \subset D_m$. Действительно, предположим, что это не так. Это означает, что в таком случае наша последовательность множеств $\{D_n\}$ не покрывает множество $D'_n \subset D$. Тогда эта последовательность и подавно не сможет покрыть множество D, что по условию не так.

Учитывая, что $f(\bar{x}) \geqslant 0$, имеем

$$a'_n = \int\limits_{D'_n}\cdots\int f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{D_m}\cdots\int f(x)\,dx = a_m.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ (а значит, и $m \to \infty$), получаем $I' \leqslant I$. Теперь, поменяв местами D'_n и D_m (в том плане, что для любого n точно также можно найти такое m, что $D_m \subset D'_n$), получаем $I \leqslant I'$. Но из этого следует, что $I' = I$.

Таким образом, мы получили, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к одному и тому же числу по любой последовательности. Но это и значит, что несобственный интеграл (1) сходится.

[:|||||:]

Теорема 64.2 (*Общий признак сравнения*). *Пусть $\forall x \in D$ справедливо $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда из сходимости $\int\limits_D\cdots\int g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_D\cdots\int f(x)\,dx$. Если же $\int\limits_D\cdots\int f(x)\,dx \nrightarrow$, то и $\int\limits_D\cdots\int g(x)\,dx \nrightarrow$.*

Доказательство. Эта теорема — прямое следствие из предыдущей. **[:|||||:]**

Часть 65
Несобственные кратные интегралы II

Здесь мы рассмотрим абсолютную и условную сходимость и докажем одно важное отличие несобственных интегралов кратности $n \geqslant 2$ от таковых при $n = 1$.

Будем говорить, что $\int\limits_D\cdots\int f(x)\,dx$ **сходится абсолютно**, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_D\cdots\int |f(x)|\,dx$. Приведем сначала классическое свойство, аналогичное таковому в одномерном случае.

Теорема 65.1. *Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_D\cdots\int |f(x)|\,dx$, то сходится и $\int\limits_D\cdots\int f(x)\,dx$.*

Доказательство. Введем функции

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},$$
$$f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Заметим, что на самом деле они записываются следующим образом:

$$f_+(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) < 0, \\ f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) > 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0. \end{cases}.$$

Но тогда $0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|$ и $0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|$. Тогда по теореме 64.2 интегралы $\underset{D}{\int\cdots\int} f_+(x)\,dx$ и $\underset{D}{\int\cdots\int} f_-(x)\,dx$ сходятся. Обратите внимание, что данные функции неотрицательны, поэтому мы можем воспользоваться этой теоремой. Из-за того, что знак у $f(x)$ не фиксирован, нельзя сразу написать $f(x) \leqslant |f(x)|$ и воспользоваться этой же теоремой.

Осталось лишь заметить, что $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. **[:|||||:]**

А теперь сформулируем и докажем основное отличие абсолютной сходимости в многомерном случае от одномерного.

Теорема 65.2. *Если $n \geqslant 2$ и $D \subset \mathbb{R}^n$, то из сходимости несобственного интеграла $\underset{D}{\int\cdots\int} f(x)\,dx$ следует сходимость $\underset{D}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx$.*

Доказательство. От противного. Пусть $\underset{D}{\int\cdots\int} f(x)\,dx$ сходится, а $\underset{D}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx$ нет. Тогда, учитывая, что $|f(x)| \geqslant 0$, по теореме 64.1 для любой последовательности множеств $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих D, последовательность $\{a_n\}$ (где $a_n = \underset{D_n}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx$) не будет ограничена, а учитывая, что $\{a_n\} \nearrow$ можно заключить, что данная последовательность является бесконечно большой.

Тогда и любая ее подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$ бесконечно большая. Пусть $a_{k_{n+1}} > 3a_{k_n} + 2n + 4$. Расписывая a_{k_n} согласно определению,

$$\underset{D_{k_{n+1}}}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx > 3 \underset{D_{k_n}}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx + 2n + 4.$$

Введем $P_n = D_{k_{n+1}} \setminus D_{k_n}$. Тогда

$$\underset{P_n}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx = \underset{D_{k_{n+1}}}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx - \underset{D_{k_n}}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx$$

и предыдущее неравенство записывается как

$$\underset{P_n}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx > 2 \underset{D_{k_n}}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx + 2n + 4. \tag{1}$$

Воспользуемся теперь функциями $f_+(x)$ и $f_-(x)$ из предыдущей теоремы. Можно записать $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. Предположим теперь, что $\underset{P_n}{\int\cdots\int} f_+(x)\,dx > \underset{P_n}{\int\cdots\int} f_-(x)\,dx$. Тогда

$$\underset{P_n}{\int\cdots\int} f_+(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2} \underset{P_n}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx > \underset{D_{k_n}}{\int\cdots\int} |f(x)|\,dx + n + 2,$$

где последний переход сделан, используя (1).

В силу того, что $f(x)$ интегрируема по любому компакту из D, то $f_+(x)$ и $f_-(x)$ также интегрируемы по любому компакту по своему определению. В силу интегрируемости $f_+(x)$ существует разбиение P_n на подобласти P_{n_i} такое, что нижняя сумма Дарбу функции $f_+(x)$ (которая, напомним, определяется как $\underline{S} = \sum m_i \Delta P_{n_i}$) отличается от $\int\limits_{P_n}\cdots\int f_+(x)\,dx$ не более, чем на $\forall\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\int\limits_{P_n}\cdots\int f_+(x)\,dx - \underline{S} < 1 \Rightarrow \underline{S} > \int\limits_{P_n}\cdots\int f_+(x)\,dx - 1 > \int\limits_{D_{k_n}}\cdots\int |f(x)|\,dx + n + 1.$$

Но поскольку нижняя сумма Дарбу больше, чем $\int\limits_{D_{k_n}}\cdots\int |f(x)|\,dx + n + 1$, то и $\int\limits_{P_n}\cdots\int f_+(x)\,dx$ тоже больше этого интеграла. Обозначим теперь через $\widetilde{P}_n$ те участки области P_n, в которых $f(x) > 0$, а значит $m_i \geqslant 0$. Тогда неравенство

$$\int\limits_{\widetilde{P}_n}\cdots\int f_+(x)\,dx > \int\limits_{D_{k_n}}\cdots\int |f(x)|\,dx + n + 1,$$

учитывая, что на $\widetilde{P}_n$ выполняется $f_+(x) = f(x)$, переписывается в виде

$$\int\limits_{\widetilde{P}_n}\cdots\int f(x)\,dx > \int\limits_{D_{k_n}}\cdots\int |f(x)|\,dx + n + 1. \tag{2}$$

Пусть $\hat{D}_n = D_{k_n} \cup \widetilde{P}_n$. Запишем следующее очевидное равенство:

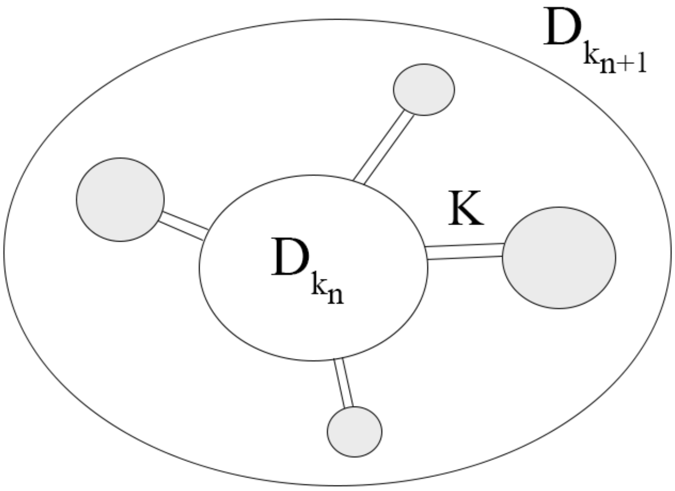
$$\int\limits_{D_{k_n}}\cdots\int f(x)\,dx \geqslant -\int\limits_{D_{k_n}}\cdots\int |f(x)|\,dx. \tag{3}$$

Теперь, складывая (2) и (3), получаем

$$\int\limits_{\hat{D}_n}\cdots\int f(x)\,dx \geqslant n + 1.$$

Фактически мы теперь получили последовательность, каждый интеграл по которой растет не медленнее, чем $n + 1$. Из этого можно было бы заключить, что $\int\limits_{D}\cdots\int f(x)\,dx \nrightarrow$, но так сделать нельзя, поскольку, вообще говоря, $\hat{D}_n$ — несвязное объединение некоторых компактов, а по определению исчерпывающая последовательность должна состоять из связных областей.

Чтобы это преодолеть, построим множество $\overset{0}{D}_n = \hat{D}_n \cup K$, где K — каналы, «соединяющие» различные компоненты $\hat{D}_n$ (а именно, P_n) с D_{k_n}.



Поскольку функция f ограничена (что следует из сходимости несобственного интеграла по предположению), а каналы K могут быть сколь угодно малыми, то можно получить $\left|\int\limits_{K}\cdots\int f(x)\,dx\right| < 1$, выбрав подходящим образом каналы. В итоге получаем

$$\int\limits_{\overset{0}{D}_n}\cdots\int f(x)\,dx > n.$$

Отметим, что $\{\overset{0}{D}_n\}$ исчерпывает D, вообще говоря, не монотонно, поскольку если $\widetilde{P}_n$ примыкает к границе $D_{n_{k+1}}$, то ее замыкание может «вылезти» за пределы $D_{n_{k+1}}$ (а значит, и за пределы $\overset{0}{D}_{n+1}$). Однако монотонно исчерпывать D будет уже последовательность $\{\overset{0}{D}_{2n}\}$, для которой справедлива оценка $\int\limits_{\overset{0}{D}_{2n}}\cdots\int f(x)\,dx > 2n$. Но тогда $\int\limits_{D}\cdots\int f(x)\,dx$ расходится, т.е. получили противоречие.

Если же $\int\limits_{P_n}\cdots\int f_-(x)\,dx > \int\limits_{P_n}\cdots\int f_+(x)\,dx$, то можно аналогично получить

$$-\int\limits_{P_n}\cdots\int f_+(x)\,dx < \frac{1}{2}\int\limits_{P_n}\cdots\int |f(x)|\,dx$$

и прийти к неравенству

$$\int\limits_{\overset{0}{D}_{2n}}\cdots\int f(x)\,dx < -2n.$$

[:||||:]

Часть 66
Собственные интегралы, зависящие от параметра

1 Пределы интегрирования не зависят от параметра

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную на $\Pi = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$. Пусть $\forall y \in [c,d]$ существует

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

называемый **собственным интегралом, зависящем от параметра** (сокращенно ИЗП).

Теорема 66.1 (***О непрерывности***). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в Π, то ИЗП (1) непрерывен на $[c,d]$ (даже равномерно непрерывен по теореме Кантора).*

Доказательство. Поскольку $f(x,y) \in \mathrm{C}(\Pi)$, то она непрерывна на $[c,d]$ (а значит, и равномерно непрерывна), т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall x \in [a,b],\ \forall y_1, y_2 \in [c,d] : |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Тогда

$$|J(y_1) - J(y_2)| = \left| \int\limits_a^b (f(x,y_1) - f(x,y_2))\,dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,y_1) - f(x,y_2)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

но это и означает, что $J(y)$ равномерно непрерывна на $[c,d]$. **[:|||||:]**

Теорема 66.2 (***Об интегрируемости***). *Если $f(x,y)$ непрерывна на Π, то $J(y)$ интегрируема на отрезке $[c,d]$, причем интегрирование можно проводить под знаком интеграла, т.е.*

$$\int\limits_c^d J(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{2}$$

Доказательство. По предыдущей теореме $J(y)$ непрерывна на $[c,d]$, а значит она интегрируема на $[c,d]$. Тогда формула (2) вытекает из теоремы 62.9 (сведение двойного интеграла к повторному):

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \iint\limits_\Pi f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

[:|||||:]

Отметим, что если выполнено условие теоремы 66.2, то $\forall y_0 \in [c,d] \Rightarrow J(y) \in \mathfrak{R}[c,y_0]$ и справедлива формула (2) для $y_0 = d$. Иными словами, данная теорема справедлива не только на Π, но и на любом его «подпрямоугольнике».

Теорема 66.3 (***О дифференцируемости***). *Если $f(x,y)$ непрерывна в Π и $f'_y(x,y)$ непрерывна в Π, то $J(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и справедлива формула*

$$J'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Доказательство. Поскольку $f'_y(x,y)$ непрерывна, то функция $K(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$ интегрируема на $[c,d]$, а значит существует интеграл с переменным верхним пределом

$$\int\limits_c^y K(t)\,dt = \int\limits_c^y \left(\int\limits_a^b f'_t(x,t)\,dx\right)\,dt = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^y f'_t(x,t)\,dt\right)\,dx =$$

Здесь последний переход сделан по предыдущей теореме. Теперь воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$= \int\limits_a^b (f(x,y) - f(x,c))\,dx = J(y) - J(c).$$

Продифференцируем полученное равенство

$$\int\limits_c^y K(t)\,dt = J(y) - J(c),$$

по y, используя теорему о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом:

$$K(y) = J'(y),$$

что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

2 Пределы интегрирования зависят от параметра

Предположим теперь, что $f(x,y)$ определена в $D = [\alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)] \times [c \leqslant y \leqslant d]$. Пусть $\forall y \in [c,d]$ существует интеграл

$$J(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx. \tag{3}$$

В этом ИЗП от параметра уже зависят и пределы интегрирования.

Теорема 66.4 (***О непрерывности***). *Пусть $f(x,y)$ непрерывна в D, а функции $\alpha(y), \beta(y)$ непрерывны на $[c,d]$. Тогда $J(y)$, определенная в* (3)*, непрерывна на $[c,d]$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $y_0 \in [c,d]$ и рассмотрим 3 функции:

$$J_1(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx,$$

$$J_2(y) = \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx,$$

$$J_3(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx.$$

Тогда $J(y) = J_1(y) + J_2(y) - J_3(y)$. Теперь нужно доказать непрерывность $J(y)$ в точке y_0, т.е. доказать, что

$$\exists \lim_{y\to y_0} J(y) = J(y_0).$$

С другой стороны,

$$\lim_{y\to y_0} J(y) = \lim_{y\to y_0} (J_1(y) + J_2(y) - J_3(y)),$$

и при этом выполняется

$$J(y_0) = J_1(y_0)$$

Поэтому нужно доказать, что

$$\lim_{y\to y_0} J_1(y) = J_1(y_0),$$
$$\lim_{y\to y_0} J_2(y) = 0,$$
$$\lim_{y\to y_0} J_3(y) = 0.$$

Тот факт, что $\lim\limits_{y\to y_0} J_1(y) = J_1(y_0)$ вытекает из теоремы 66.1, поскольку пределы интегрирования у $J_1(y)$ постоянные.

Интеграл $J_2(y) = \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ можно расписать по теореме о среднем как

$$J_2(y) = f(x^*,y)\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} dx = f(x^*,y)(\beta(y) - \beta(y_0)), \text{ где } x^* \in [\beta(y_0), \beta(y)].$$

Теперь заметим, что $\lim\limits_{y\to y_0} (\beta(y) - \beta(y_0)) = 0$, т.к. $\beta(y) \in \mathrm{C}[c,d]$. А $\lim\limits_{y\to y_0} f(x^*,y) = f(\beta(y_0), y_0)$. В итоге, $\lim\limits_{y\to y_0} J_2(y) = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{y\to y_0} J_3(y) = 0$. **[:|||||:]**

Теорема 66.5 (*О дифференцируемости*). *Пусть $f(x,y), f'_y(x,y) \in \mathrm{C}(\Pi)$, а $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ дифференцируемы на $[c,d]$. Тогда $J(y)$, определенная формулой (3), дифференцируема на $[c,d]$, причем выполняется*

$$J'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y). \tag{4}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $y_0 \in [c,d]$. Используя функции J_1, J_2, J_3 из доказательства предыдущей теоремы, запишем

$$J(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx.$$

Напоминаем, что

$$J_1(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx,$$

$$J_2(y) = \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx,$$

$$J_3(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx.$$

Заметим, что пределы интегрирования у $J_1(y)$ не зависят от y, поэтому (учитывая непрерывность f и f'_y по условию) мы можем воспользоваться теоремой 66.3 и найти значение производной $J'_1(y)$ в точке y_0:

$$J'_1(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx.$$

Для производной $J'_2(y)$ в y_0 по определению имеем

$$J'_2(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{J_2(y) - J_2(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{J_2(y)}{y-y_0}.$$

Распишем $J_2(y)$, используя теорему о среднем, как $f(x^*,y) \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} dx$, где $x^* \in [\beta(y_0), \beta(y)]$. Тогда имеем

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x^*,y)(\beta(y) - \beta(y_0))}{y-y_0} = f(\beta(y_0), y_0)\cdot \beta'(y_0).$$

Аналогично доказывается, что $J'_3(y_0) = \alpha'(y_0) f(\alpha(y_0), y_0)$. В силу произвольности y_0 получаем формулу (4). **[:||||:]**

Часть 67
Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1 Определение

Предположим теперь, что функция $f(x,y)$ определена в бесконечной полуполосе $\Pi_\infty = [a \leqslant x < \infty) \times [c \leqslant y \leqslant d]$. Пусть также $\forall y \in [c,d]$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$.

Тогда функция

$$J(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \tag{1}$$

называется **несобственным интегралом, зависящим от параметра**. Сокращенно обозначается как НИЗП.

Будем говорить, что НИЗП $J(y)$ сходится **равномерно по параметру** y на $[c,d]$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) > a : \forall R > A(\varepsilon),\ \forall y \in [c,d] \Rightarrow \left| \int\limits_R^\infty f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Мы уже рассматривали ранее равномерную сходимость функциональных последовательностей и рядов. Как и в тех случаях, равномерная сходимость на $[c,d]$ отличается от обычной тем, что число A зависит **только** от ε и предъявляется сразу для всех $y \in [c,d]$.

Теорема 67.1 (***Критерий Коши сходимости НИЗП***). *НИЗП* $J(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) > a : \forall R_1, R_2 : R_2 > R_1 > A(\varepsilon),\ \forall y \in [c,d] \Rightarrow \left| \int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство.

- ***Необходимость.***

  Пусть $J(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$. По определению это означает, что

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) : \forall R > A(\varepsilon),\ \forall y \in [c,d] \Rightarrow \left| \int\limits_R^\infty f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Значит, $\forall R_2 > R_1 > A(\varepsilon)$ справедливо

  $$\left| \int\limits_{R_1}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$
  $$\left| \int\limits_{R_2}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Тогда

  $$\left| \int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int\limits_{R_1}^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_{R_2}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{R_1}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| + \left| \int\limits_{R_2}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

- ***Достаточность.***

  Отметим сначала, что из обычного признака Коши сходимости несобственного интеграла (не равномерной) следует, что $\forall y \in [c,d]$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$. Зафиксируем $R = R_1 > A(\varepsilon)$ и перейдем к пределу при $R_2 \to +\infty$ (по любой бесконечно большой последовательности) в неравенстве (2). Тогда $\forall y \in [c,d]$ получаем

  $$\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon = \varepsilon',$$

  из чего и следует, что $J(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$.

[:|||||:]

2 Признаки сходимости

А сейчас рассмотрим несколько более удобных для применения нежели критерий Коши признаков сходимости НИЗП. Все они в некоторой степени повторяют признаки сходимости функциональных рядов (что отражено и в названиях признаков).

Теорема 67.2 (***Признак Вейерштрасса***). *Пусть $f(x,y)$, определенная в Π_∞, $\forall y \in [c,d]$ и $\forall R > a$ интегрируема на $[a,R]$. Пусть некоторая функция $g(x)$ также интегрируема на $[a,R]$ для любого $R > a$, причем $\forall (x,y) \in \Pi_\infty \Rightarrow |f(x,y)| \leqslant g(x)$, а $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \to$. Тогда $J(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$.*

Доказательство. Поскольку $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \to$, то по критерию Коши сходимости несобственного интеграла

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) : \forall R_2 > R_1 > A(\varepsilon) \Rightarrow \left|\int\limits_{R_1}^{R_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Учитывая, что $\forall (x,y) \in \Pi_\infty \Rightarrow |f(x,y)| \leqslant g(x)$, функция $g(x)$ неотрицательна, а значит $\int\limits_{R_1}^{R_2} g(x)\,dx < \varepsilon$. Тогда $\forall y \in [c,d]$ имеем

$$\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{R_1}^{R_2} |f(x,y)|\,dx \leqslant \int\limits_{R_1}^{R_2} g(x)\,dx < \varepsilon.$$

По критерию Коши сходимости НИЗП получаем требуемое. **[:|||||:]**

Следствие 67.3. *Пусть $\varphi(x,y)$ ограничена на Π_∞ и $\forall y \in [c,d]$ функция $\varphi(x,y)$ интегрируема на любом отрезке $[a,R]$. Пусть для $\psi(x)$ известно, что $\int\limits_a^{+\infty} |\psi(x)|\,dx \to$.*

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x,y)\psi(x)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Поскольку $\int\limits_a^{+\infty} |\psi(x)|\,dx \to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} \psi(x)\,dx \to$, а значит функция $\varphi(x,y)\psi(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,R]$ для любого $y \in [c,d]$. Из ограниченности $\varphi(x,y)$ следует, что

$$|\varphi(x,y)\psi(x)| \leqslant M|\psi(x)|.$$

Но по условию

$$\int\limits_a^{+\infty} |\psi(x)|\,dx \to .$$

Тогда по признаку Вейерштрасса $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x,y)\psi(x)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$. **[:|||||:]**

Теорема 67.4 (*Признак Дини*). *Пусть* $f(x,y)$ *непрерывна и неотрицательна в* Π_∞*. Пусть также несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится* $\forall y \in [c,d]$*, а определяемая им функция* $J(y)$ *является непрерывной на* $[c,d]$*. Тогда сходимость НИЗП* $J(y)$ *является равномерной на* $[c,d]$*.*

Доказательство. Рассмотрим функциональную последовательность $J_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$. Поскольку $f(x,y)$ непрерывна в Π_∞, то $f(x,y)$ непрерывна и в $[a \leqslant x \leqslant a+n] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ для любого n. Тогда $J_n(y)$ непрерывна на $[c,d]$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

$f(x,y) \geqslant 0$, а значит $J_n(y) \geqslant 0$ и $\{J_n(y)\} \nearrow$ для любого $y \in [c,d]$. Заметим теперь, что для любого $y \in [c,d]$ выполняется

$$|J(y) - J_n(y)| = \left|\int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon,$$

т.к. несобственный интеграл $\int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится. Тогда последовательность $\{J_n(y)\}$ сходится к $J(y)$. А по признаку Дини равномерной сходимости функциональной последовательности (теорема 55.1) получаем, что $\{J_n(y)\} \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} J(y)$. Это означает по определению, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall y \in [c,d] \Rightarrow \left|\int\limits_{a+N(\varepsilon)}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теперь, положив $A(\varepsilon) = a+N(\varepsilon)$, получаем в точности определение равномерной сходимости $J(y)$ на $[c,d]$. **[:|||||:]**

Теорема 67.5 (*Признак Дирихле*). *Пусть для функций* $f(x,y)$ *и* $g(x,y)$ *выполнено:*

1. $g(x,y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} 0$ *при* $x \to +\infty$.
2. $g(x,y)$ *монотонна по* x $\forall y \in [c,d]$.
3. $\forall R > a,\ \forall y \in [c,d]\ \exists M > 0 : \left|\int\limits_a^R f(x,y)\,dx\right| \leqslant M$.

Тогда $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Для $\forall R_2 > R_1 > a$ рассмотрим

$$\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} fg\,dx\right| = \left|g(R_1+0,y)\int\limits_{R_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(R_2-0,y)\int\limits_{\xi}^{R_2} f(x,y)\,dx\right|.$$

Напоминаем, что, поскольку $g(x,y)$ монотонна, мы можем воспользоваться второй теоремой о среднем. Здесь $\xi \in [R_1, R_2]$. Тогда имеем

$$\left|g(R_1+0,y)\int\limits_{R_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(R_2-0,y)\int\limits_{\xi}^{R_2} f(x,y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|g(R_1+0,y)\int\limits_{R_1}^{\xi} f(x,y)\,dx\right| + \left|g(R_2-0,y)\int\limits_{\xi}^{R_2} f(x,y)\,dx\right| < M(|g(R_1+0,y)| + |g(R_2-0,y)|).$$

Здесь мы воспользовались третьим условием теоремы. Теперь воспользуемся первым условием:

$$g(x,y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) > a : \forall y \in [c,d],\ \forall R > A(\varepsilon) \Rightarrow |g(R,y)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Но тогда получаем, что

$$\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} fg\,dx\right| < M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon.$$

[:||||:]

Теорема 67.6 (*Признак Абеля*). *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Интеграл* $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$ *по* y.

2. *Функция* $g(x,y)$ *ограничена и монотонна по* x.

Тогда интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ *сходится на* $[c,d]$ *равномерно.*

Доказательство. Снова воспользуемся второй теоремой о среднем:

$$\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| = \left|g(R_1+0,y)\int\limits_{R_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(R_2-0,y)\int\limits_{\xi}^{R_2} f(x,y)\right| \leqslant \left|M\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx\right|.$$

Здесь M ограничивает $g(x,y)$. Из первого условия теоремы и критерия Коши сходимости НИЗП следует, что

$$\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Но тогда

$$\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

[:||||:]

Часть 68
Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

1 Основные теоремы

Теорема 68.1 (***О непрерывности***). *Пусть $f(x,y)$ непрерывна на Π_∞ и $J(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$. Тогда $J(y) \in \mathrm{C}[c,d]$.*

Доказательство. Рассмотрим функциональную последовательность $J_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$. Поскольку $f(x,y)$ непрерывна в Π_∞, то $f(x,y)$ непрерывна и на $[a \leqslant x \leqslant a+n] \times [c \leqslant y \leqslant d]$. А тогда по теореме 66.1 $J_n(y)$ непрерывна на $[c,d]$. В силу равномерной сходимости $J(y)$:

$$J(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \geqslant a : \forall R > A(\varepsilon),\, \forall y \in [c,d] \Rightarrow \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теперь заметим, что $|J(y) - J_n(y)| = \left|\int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|$. Тогда при $N(\varepsilon) = A(\varepsilon) - a + 1$ получаем, что $\forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |J(y) - J_n(y)| < \varepsilon$, т.е. $\{J_n(y)\} \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} J(y)$. Но тогда по теореме 55.2 (теорема о непрерывности предельной функции при непрерывности каждого члена функциональной последовательности) $J(y)$ непрерывна. [:||||:]

Теорема 68.2 (***О дифференцируемости***). *Пусть $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны на Π_∞, $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится в произвольной точке из отрезка $[c,d]$ и $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$. Тогда $J(y)$ дифференцируема на $[c,d]$, причем*

$$J'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

Доказательство. Для каждого члена функциональной последовательности $J_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$ выполнены все условия теоремы 66.3, а значит $J'_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f'_y(x,y)\,dx$. Из критерия Коши равномерной сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A(\varepsilon)\geqslant a: \forall R_2>R_1>A,\ \forall y\in[c,d] \Rightarrow \left|\int\limits_{R_1}^{R_2} f'_y(x,y)\right|<\varepsilon.$$

Тогда заметим, что

$$|J'_{n+p}(y)-J'_n(y)|=\left|\int\limits_{a+n}^{a+n+p} f'_y(x,y)\,dx\right|<\varepsilon,$$

если принять $R_1=a+n$, $R_2=a+n+p$. Значит, $\{J'_n(y)\}\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$ по критерию Коши сходимости функциональной последовательности.

Заметим также, что из сходимости $J(y)$ в произвольной точке следует поточечная сходимость $\{J_n(y)\}$ в той же точке, поскольку $|J(y)-J_n(y)|=\left|\int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 56.4, а значит

$$J'(y)=\Big(\lim_{n\to\infty} J_n(y)\Big)'=\lim_{n\to\infty} J'_n(y)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{a+n} f'_y(x,y)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

[:|||||:]

Теорема 68.3 (*Об интегрировании*). *Пусть выполнены все условия теоремы 68.1. Тогда $J(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ является интегрируемой по $[c,d]$, причем*

$$\int\limits_c^d J(y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{1}$$

Доказательство. По теореме 68.1 $J(y)\in \mathrm{C}[c,d]$, а значит $J(y)\in\mathfrak{R}[c,d]$. Для доказательства равенства (1) нужно доказать, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A(\varepsilon)\geqslant a: \forall R\geqslant A,\ \forall y\in[c,d] \Rightarrow \left|\int\limits_c^d J(y)\,dy-\int\limits_a^R dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right|<\varepsilon.$$

Вспомним теперь, что по теореме 66.2

$$\int\limits_a^R dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^R f(x,y)\,dx.$$

Тогда можно рассмотреть

$$\left|\int\limits_c^d J(y)\,dy-\int\limits_c^d dy\int\limits_a^R f(x,y)\,dx\right|=\left|\int\limits_c^d dy\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|.$$

Но из равномерной сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ следует, что $\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$. В итоге, получаем

$$\left|\int\limits_c^d J(y)\,dy - \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Следствие 68.4. *Пусть $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна на Π_∞, а $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится поточечно $\forall y \in [c,d]$. Пусть также $J(y) \in \mathrm{C}[c,d]$. Тогда справедлива формула интегрирования по параметру под знаком интеграла (1).*

Доказательство. По признаку Дини сходимость $J(y)$ на $[c,d]$ равномерная. А значит, можно воспользоваться теоремой 68.3. **[:|||||:]**

Для следующей теоремы вдобавок к $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ определим функцию $K(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$.

Теорема 68.5 (*О несобственной интегрируемости НИЗП*). *Пусть $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в $\{(x,y) \mid x \geqslant a,\ y \geqslant c\}$. Пусть $\forall y \geqslant c$ сходится и непрерывна $J(y)$ и $\forall x \geqslant a$ сходится и непрерывна $K(x)$. Пусть также сходится один из несобственных интегралов $\int\limits_a^{+\infty} K(x)\,dx$ или $\int\limits_c^{+\infty} J(y)\,dy$. Тогда сходится и второй из этих интегралов, причем справедливо*

$$\int\limits_a^{+\infty} K(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_c^{+\infty} J(y)\,dy.$$

Доказательство. Предположим, что $\int\limits_c^{+\infty} J(y)\,dy$ сходится. Доказательство другого случая аналогично этому. Требуется доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \geqslant a : \forall R \geqslant A(\varepsilon),\ \forall y \geqslant c \Rightarrow \left|\int\limits_c^{+\infty} J(y)\,dy - \underbrace{\int\limits_a^R dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy}_{*}\right| < \varepsilon.$$

Заметим теперь, что для интеграла (*) выполнены все условия теоремы 68.3, а значит

$$\int\limits_a^R dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^R f(x,y)\,dx.$$

Тогда можно рассмотреть

$$\left|\int\limits_c^{+\infty} J(y)\,dy - \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^R f(x,y)\,dx\right| = \left|\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_c^{\widetilde{R}} dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\widetilde{R}}^{+\infty} dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_c^{\widetilde{R}} dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int\limits_{\widetilde{R}}^{+\infty} dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|.$$

По признаку Дини $J(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$, а значит $\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(\widetilde{R}-c)}$, т.е.

$$\left|\int\limits_c^{\widetilde{R}} dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По нашему предположению $\int\limits_c^{+\infty} J(y)\,dy \to$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \widetilde{R}(\varepsilon) \geqslant c : \left|\int\limits_{\widetilde{R}}^{+\infty} dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге, получаем

$$\left|\int\limits_c^{+\infty} J(y)\,dy - \int\limits_a^R dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[:|||||:]

2 Замечание о несобственном интеграле второго рода

Читатель может вспомнить, что при изучении несобственных интегралов, помимо интегралов с бесконечной областью интегрирования (первого рода) мы рассматривали и интегралы по таким конечным отрезкам, по которым функция не интегрируема в собственном смысле.

Предположим, что функция $f(x,y)$ определена и ограничена в полуоткрытом прямоугольнике $\Pi = [a \leqslant x < b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ и что $\forall y \in [c,d]$ сходится несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, т.е. $\exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x,y)\,dx$.

Будем называть несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ **равномерно сходящимся на сегменте** $[c,d]$, если он сходится $\forall y \in [c,d]$, и справедливо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \alpha,\ 0 < \alpha < \delta(\varepsilon),\ \forall y \in [c,d] \Rightarrow \left|\int\limits_{b-\alpha}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Отметим, что для несобственного интеграла второго рода справедливы все рассмотренные выше теоремы, поскольку он преобразуется к уже изученному несобственному интегралу первого рода подстановкой

$$\left[\begin{aligned} x &= b - \frac{1}{t}, \\ dx &= \frac{dt}{t^2} \end{aligned}\right] \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x,y)\,dx = \lim_{\alpha\to 0+0} \int\limits_{1/(b-a)}^{1/\alpha} \frac{f\left(b-\frac{1}{t},y\right)}{t^2}\,dt.$$

Часть 69

Интегралы Эйлера

1 Бета- и Гамма-функции Эйлера

А теперь рассмотрим примеры интегралов, зависящих от параметра, находящих широкое применение в математическом анализе.

Бета-функцией Эйлера или **интегралом Эйлера первого рода** называется функция

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Гамма-функцией Эйлера или **интегралом Эйлера второго рода** называется функция

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Установим теперь, при каких значениях p и q данные интегралы сходятся. Сразу заметим, что при $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ обе функции не имеют особых точек, и соответствующие интегралы сходятся. Если же $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, то для бета-функции имеем:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}_{B_1(p,q)} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}_{B_2(p,q)}.$$

Поскольку $(1-x)^{q-1} \leqslant C_q$ в B_1 и $x^{p-1} \leqslant C_p$ в B_2 для некоторых C_q и C_p, то из признака сравнения (с $x^{-\alpha}$) получаем, что $B_1(p,q) \to$ при $p > 0$ и при любом q. Аналогично, $B_2(p,q) \to$ при $q > 0$ и при любом p. Значит, $B(p,q) \to$ при $p > 0$, $q > 0$.

Для гамма-функции получаем

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \underbrace{\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx}_{\Gamma_1(p)} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx}_{\Gamma_2(p)}.$$

Для $\Gamma_1(p)$ можно записать, используя разложение в ряд Тейлора:

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx \sim \int\limits_0^1 x^{p-1}\,dx - \int\limits_0^1 x^p\,dx.$$

Тогда по тому же признаку сравнения $\Gamma_1(p) \to$ при $p > 0$. $\Gamma_2(p)$ же сходится вообще при любых значениях p. Значит, $\Gamma(p) \to$ при $p > 0$.

Теорема 69.1 (*Непрерывность интегралов Эйлера*). *$B(p,q)$ и $\Gamma(p)$ непрерывны при $p > 0$ и $q > 0$.*

Доказательство.

- ***Бета-функция***

  Возьмем произвольные $p_0, p_1, q_0, q_1 : 0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1 < \infty$ и $0 < q_0 \leqslant q \leqslant q_1 < \infty$. Докажем, что $B(p,q) \overset{R}{\rightrightarrows}$, где $R = [p_0 \leqslant p \leqslant p_1] \times [q_0 \leqslant q \leqslant q_1]$. Для этого заметим, что $\forall t \in (0,1) \Rightarrow t^{p-1}(1-t)^{q-1} \leqslant t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}$. Но $\int\limits_0^1 t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}\,dt \to$. Тогда по признаку Вейерштрасса $B(p,q) \overset{R}{\rightrightarrows}$. Значит, по теореме 68.1 $B(p,q)$ непрерывна на R. А в силу произвольности R получаем, что $B(p,q)$ непрерывна на всей области своего определения.

- ***Гамма-функция***

  Возьмем произвольные $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1 < \infty$. Снова обозначим $R = [p_0 \leqslant p \leqslant p_1]$. Воспользуемся тем же способом доказательства, что и в предыдущем пункте. Заметим, что при $t \in [0,1] \Rightarrow e^{-t}t^{p-1} \leqslant e^{-t}t^{p_0-1}$, а при $t \in [1,\infty) \Rightarrow e^{-t}t^{p-1} \leqslant e^{-t}t^{p_1-1}$. Тогда при $t \in [0,\infty)$ получаем, что $e^{-t}t^{p-1} \leqslant e^{-t}(t^{p_0-1}+t^{p_1-1})$. Но, как известно, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}(t^{p_0-1}+t^{p_1-1})\,dt \to$. Тогда по признаку Вейерштрасса $\Gamma(p) \overset{R}{\rightrightarrows}$. А значит, аналогично предыдущему пункту, $\Gamma(p)$ непрерывна на всей области своего определения.

[:|||||:]

2 Свойства интегралов Эйлера

2.1 Свойства Бета-функции

1. ***Симметричность***

   Заключается в том, что $\forall p, q > 0 \Rightarrow B(p,q) = B(q,p)$. Действительно,

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \left\{ \begin{array}{c} x = 1-t, \\ dx = -dt \end{array} \right\} = \int\limits_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}\,dx = B(q,p).$$

2. ***Формулы приведения***

   Справедливы следующие формулы:

$$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q),$$
$$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q).$$

Докажем вторую формулу, справедливость первой тогда будет следовать из свойства симметричности.

$$B(p,q+1)=\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^q\,dt=\frac{1}{p}t^p(1-t)^q\Big|_0^1+\frac{q}{p}\int\limits_0^1 t^p(1-t)^{q-1}\,dt=$$

$$=\{t^p=t^{p-1}-(1-t)t^{p-1}\}=\frac{q}{p}\int\limits_0^1(t^{p-1}-(1-t)t^{p-1})(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{q}{p}B(p,q)-\frac{q}{p}B(p,q+1).$$

Тогда

$$\frac{p+q}{p}B(p,q+1)=\frac{q}{p}B(p,q),$$
$$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$$

3. При $q=n\in\mathbb{N}$ справедлива формула

$$B(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}.$$

Докажем по индукции. При $n=1$ имеем

$$B(p,1)=\frac{1}{p}.$$

Действительно,

$$B(p,1)=\int\limits_0^1 t^{p-1}\,dt=\frac{t^p}{p}\Big|_0^1=\frac{1}{p}.$$

Теперь из справедливости доказываемой формулы для n, для $n=n+1$ получаем, пользуясь формулой приведения:

$$B(p,n+1)=\frac{n}{p+n}B(p,n)=\frac{n}{p+n}\cdot\frac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}=\frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)},$$

что и требовалось доказать.

Если же и $p=m\in\mathbb{N}$, то

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Это свойство следует из предыдущего, если учесть, что при натуральных p справедливо

$$\frac{1}{p(p+1)\dots(p+n-1)}=\frac{(p-1)!}{(p+n-1)!}.$$

2.2 Свойства Гамма-функции

1. ***Формула приведения***

$$\forall p > 0 \Rightarrow \boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}.$$

Действительно, воспользовавшись интегрированием по частям, получаем

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^p\,dt = \underbrace{-e^{-t}t^p\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + p\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}\,dt = p\Gamma(p).$$

Это одно из самых важных свойств гамма-функции. При $p = n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!,$$

т.к. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$. Таким образом, во всех натуральных n гамма-функция ведет себя как факториал, но при этом она определена и при вещественном аргументе. ***Обратите внимание***, что $\Gamma(n) \neq n!$! Верно $\Gamma(n+1) = n!$.

2.

Теорема 69.2 (*Почленное дифференцирование*). *Для любых $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1 < +\infty$ и натурального n гамма-функция n раз дифференцируема по параметру, причем справедлива формула*

$$\frac{d^n}{dp^n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}\,dt = \int\limits_0^{+\infty}\frac{d^n}{dp^n}(e^{-t}t^{p-1})\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}\ln^n t\,dt.$$

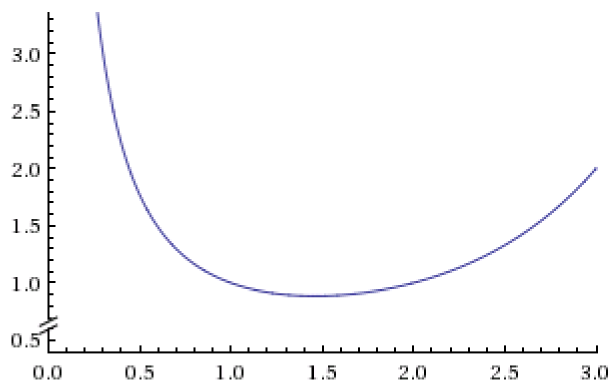
Доказательство. Для начала заметим, что $|e^{-t}t^{p-1}(\ln t)^n| \leqslant \underbrace{e^{-t}|\ln t|^n(t^{p_0-1} + t^{p_1-1})}_{*}$. Но $\int\limits_0^{+\infty} *\,dt \to$. Значит, по признаку Вейерштрасса $\int\limits_0^{+\infty}\frac{d^n}{dp^n}(e^{-t}t^{p-1})\,dt \rightrightarrows$. Тогда выполнены все условия теоремы 68.2, и получаем то, что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

3 Построение графика гамма-функции

Прежде всего заметим, что по теореме 69.2 $\Gamma^{(2)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^2\,dx \geqslant 0$, из чего следует, что гамма-функция выпукла вниз на всей области определения. Заметим также, что

$$\lim_{p\to 0+0}\Gamma(p) = \lim_{p\to 0+0}\frac{\Gamma(p+1)}{p} = +\infty,$$

т.к. $\lim\limits_{p\to 0+0}\Gamma(p+1) = 1$.



Здесь мы воспользовались непрерывностью гамма-функции. Отметим также, что $\lim\limits_{p\to+\infty}\Gamma(p) =$

$+\infty$, т.к. $\Gamma(p) \geqslant (\lfloor p \rfloor - 1)!$. Наконец, вычислим значения функции в нескольких точках. Как мы уже знаем, $\Gamma(1) = 1$. Тогда $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$.

Наконец, вычислим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1/2}}\, dt = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\, d(\sqrt{t}) = \left\{\begin{aligned} \sqrt{t} &= x, \\ t &= x^2 \end{aligned}\right\} = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

4 Связь между интегралами Эйлера

Оказывается, между двумя интегралами Эйлера есть тесная связь, которая выражается следующей теоремой:

Теорема 69.3 (*Формула Дирихле*). *Для любых $p, q > 0$ справедливо*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Доказательство. Для начала преобразуем $B(p,q)$:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \left\{\begin{aligned} 1 - x &= \frac{1}{1+t} \Rightarrow x = \frac{t}{1+t}, \\ dx &= \frac{dt}{(1+t)^2}, \end{aligned}\right\} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{q-1}} \cdot \frac{dt}{(1+t)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt.$$

Отметим, что иногда бета-функция определяется с помощью полученной формулы. Теперь рассмотрим гамма-функцию:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx = \left\{\begin{aligned} x &= ty \\ dx &= tdy \end{aligned}\right\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ty} t^p y^{p-1}\, dy = t^p \int\limits_0^{+\infty} e^{-ty} y^{p-1}\, dy.$$

Запомним этот результат:

$$\Gamma(p) = t^p \int\limits_0^{+\infty} e^{-ty} y^{p-1}\, dy. \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ty} y^{p-1}\, dy = \left\{\begin{aligned} t &= 1 + t, \\ p &= p + q \end{aligned}\right\} = \frac{\Gamma(p+q)}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+t)y} y^{p+q-1}\, dy.$$

Снова выделим полученный результат.

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+t)y} y^{p+q-1}\, dy. \tag{2}$$

Теперь домножим обе части равенства (2) на t^{p-1} и проинтегрируем от 0 до $+\infty$. Левая часть равенства примет вид

$$\Gamma(p+q)\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}\,dt=\Gamma(p+q)B(p,q).$$

Справа же получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty}t^{p-1}\,dt\int\limits_0^{+\infty}e^{-(1+t)y}y^{p+q-1}\,dy. \tag{3}$$

Пусть $p>1$ и $q>1$. Тогда функция $f(t,y)=e^{-(t+1)y}y^{p+q-1}t^{p-1}$ неотрицательна и непрерывна при $t>0$ и $y>0$. Помимо этого рассмотрим интеграл:

$$K(t)=\int\limits_0^{+\infty}f(t,y)\,dy=t^{p-1}\cdot\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}.$$

Здесь мы воспользовались равенством (2). Получили непрерывную при $t>0$ функцию. Аналогично для $J(y)$, используя равенство (1):

$$J(y)=\int\limits_0^{+\infty}f(t,y)\,dt=y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_0^{+\infty}e^{-ty}t^{p-1}\,dt=y^{q-1}e^{-y}\Gamma(p),$$

что также является непрерывной функцией при $y>0$. В итоге, $J(y)$ и $K(t)$ сходятся равномерно по признаку Дини. А значит по теореме 68.3 можно поменять пределы интегрирования в равенстве (3):

$$\int\limits_0^{+\infty}t^{p-1}\,dt\int\limits_0^{+\infty}e^{-(1+t)y}y^{p+q-1}\,dy=\int\limits_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\,dy\int\limits_0^{+\infty}e^{-ty}t^{p-1}\,dt.$$

Теперь, пользуясь равенством (1), получаем, что это равно

$$\frac{\Gamma(p)}{y^p}\int\limits_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\,dy=\Gamma(p)\int\limits_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}\,dy=\Gamma(p)\Gamma(q).$$

Таким образом, мы получили, что

$$\Gamma(p+q)B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)\Rightarrow B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Осталось лишь разобраться с общим случаем, когда $p>0$ и $q>0$. Для этого заметим, что тогда $p+1>1$ и $q+1>1$, и запишем для них полученную формулу:

$$B(p+1,q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Приведем левую часть с помощью формул приведения бета-функции:

$$B(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p,q).$$

Теперь сделаем то же для правой части, используя формулы приведения гамма-функции:

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{pq\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)}.$$

В итоге, получаем

$$\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p,q) = \frac{pq\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)},$$
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

[:||||:]

Часть 70
Формула Стирлинга

Теорема 70.1.

$$\boxed{\lambda! = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \cdot \sqrt{2\pi\lambda}(1+\gamma_\lambda)},$$

где

$$\gamma_\lambda = \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{228\lambda^2} - \frac{139}{51840\lambda^3} - \frac{571}{2448320\lambda^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^5}\right).$$

Доказательство. Мы выведем данную формулу до $\frac{1}{\lambda^2}$ в γ_λ — получение дальнейших коэффициентов в разложении достаточно трудоемко, и не привносит каких-либо новых идей в доказательство.

Воспользуемся гамма-функцией и сделаем замену:

$$\lambda! = \Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}y^\lambda\,dy = \left\{\begin{array}{ll} y = \lambda(1+x) & e^{-y} = e^{-\lambda}e^{-\lambda x} \\ dy = \lambda dx & y^\lambda = \lambda^\lambda(1+x)^\lambda = \lambda^\lambda e^{\lambda\ln(1+x)} \end{array}\right\} =$$
$$= \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda}e^{-\lambda x}\lambda^\lambda e^{\lambda\ln(1+x)}\lambda\,dx = \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^\lambda}\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(x-\ln(1+x))}\,dx = \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^\lambda}J(\lambda).$$

Здесь для удобства мы обозначили получившийся интеграл как $J(\lambda)$. Обратим теперь внимание на показатель экспоненты. Рассмотрим функцию

$$t = g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-\ln(1+x)}, & -1 < x < 0, \\ \sqrt{x-\ln(1+x)}, & 0 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Нам понадобятся несколько ее свойств:

1. $\lim\limits_{x\to-1+0} g(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. Теперь заметим, что $\frac{dg^2(x)}{dx} = 2g(x)g'(x)$. С другой стороны, по определению функции $g(x)$:

$$\frac{dg^2(x)}{dx} = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} : \begin{cases} < 0, & \text{при } x \in (-1, 0), \\ > 0, & \text{при } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Но, аналогично, $g(x) < 0$ при $x \in (-1, 0)$ и $g(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$. Тогда в силу полученного равенства $2g(x)g'(x) = \frac{x}{1+x}$ можно заключить, что $g'(x) > 0$ при $x > -1$, $x \neq 0$. При $x = 0 \Rightarrow g'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из этого мы можем заключить, что $g(x) \uparrow$ при $x > -1$, а значит существует обратная к $g(x)$ функция $\varphi(t) = g^{-1}(t)$.

3. $g(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-1, 1)$. Действительно, функция $g^2(x)$ имеет следующее разложение в окрестности 0 (с радиусом сходимости 1):

$$g^2(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \underline{O}(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + \underline{O}(x^3).$$

Тогда существует строго положительная при $x > -1$ функция $h(x)$ такая, что

$$g^2(x) = x^2 h(x) \Rightarrow g(x) = x\sqrt{h(x)}.$$

А поскольку $h(x) = \frac{1}{2} + \underline{O}(x)$ является бесконечно дифференцируемой на $(-1, 1)$, то и $g(x)$ бесконечно дифференцируема.

4. $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема в окрестности нуля. Это непосредственно следует из предыдущего пункта, поскольку $g(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности 0.

Возьмем произвольную точку $a \in (0, 1)$. Поскольку $\varphi(t)$ пробегает все значения на $(-1, +\infty)$, $\exists b, c : \varphi(-a) = b$ и $\varphi(a) = c$, т.е. $a = -g(b) = g(c)$. Учитывая, что $g(x) < 0$ при $x \in (-1, 0)$ и $g(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$, а $a \in (0, 1)$, получаем, что $b \in (-1, 0)$ и $c \in (0, +\infty)$. Тогда

$$J(\lambda) = \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx = \int\limits_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx + \int\limits_{b}^{c} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx + \int\limits_{c}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx = J_1(\lambda) + J_2(\lambda) + J_3(\lambda).$$

Теперь оценим отдельно каждый из трех интегралов. Начнем с первого.

Заметим, что при $-1 < x < b \Rightarrow g(x) < g(b)$ в силу монотонности функции $g(x)$. Тогда при $\lambda > 1 \Rightarrow \lambda g^2(x) > \lambda g^2(b)$ (напоминаем, что $g(x) < 0$ при $-1 < x < b$), а значит $-\lambda g^2(x) < -\lambda g^2(b)$. Отсюда следует, что

$$J_1(\lambda) = \int\limits_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx \leqslant e^{-\lambda g^2(b)} \int\limits_{-1}^{b} dx = e^{-\lambda a^2}(b+1) = \underline{O}(e^{-\lambda a^2}).$$

Теперь разберемся с третьим интегралом. Здесь используется примерно та же техника. Для начала распишем $e^{-\lambda g^2(x)} = e^{-g^2(x)(\lambda-1)} e^{-g^2(x)}$. Снова в силу монотонности $g(x) > g(c)$ при $x \in (c, +\infty)$. Но на данном интервале функция уже положительна, а значит $g^2(x) > g^2(c) \Rightarrow -\lambda g^2(x) < -\lambda g^2(c) = -\lambda a^2$. Пользуясь этим, можно записать

$$J_3(\lambda) = \int\limits_{c}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx = \int\limits_{c}^{+\infty} e^{-g^2(x)(\lambda-1)} e^{-g^2(x)}\, dx \leqslant e^{-a^2(\lambda-1)} \int\limits_{c}^{+\infty} e^{-g^2(x)}\, dx.$$

Учитывая тот факт, что $\int\limits_c^{+\infty} e^{-g^2(x)}\,dx \to$, можно ограничить данный интеграл как $\int\limits_c^{+\infty} e^{-g^2(x)}\,dx \leqslant M$. Тогда

$$J_3(\lambda) = e^{-\lambda a^2} e^{a^2} M = M' e^{-\lambda a^2} \Rightarrow J_3(\lambda) = \underline{\mathrm{O}}(e^{-\lambda a^2}).$$

Таким образом, на данный момент мы имеем

$$J(\lambda) = \int\limits_b^c e^{-\lambda g^2(x)}\,dx + \underline{\mathrm{O}}(e^{-\lambda a^2}) = J_2(\lambda) + \underline{\mathrm{O}}(e^{-\lambda a^2}).$$

Фактически мы пользуемся методом Лапласа: подынтегральная функция в $J(\lambda)$ имеет максимум в точке $x = 0$. Мы разбили область интегрирования на 3 части: в областях, не содержащих точку 0 ($J_1(\lambda)$ и $J_3(\lambda)$), данный интеграл достаточно мал по сравнению с $J_2(\lambda)$. Осталось лишь оценить этот главный интеграл. Это делается чуть менее тривиально.

Для начала сделаем замену, используя обратную функцию:

$$J_2(\lambda) = \int\limits_b^c e^{-\lambda g^2(x)}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = g(x) \\ x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right\} = \int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} \varphi'(t)\,dt.$$

Теперь, пользуясь тем, что $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема в окрестности 0, разложим $\varphi'(t)$ в ряд Тейлора:

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + \underline{\mathrm{O}}(t^{2n}).$$

Тогда

$$J_2(\lambda) = \int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + \underline{\mathrm{O}}(t^{2n}) \right) dt.$$

Заметим теперь, что интегрирование производится по симметричному относительно 0 отрезку $(-a, a)$. Это значит, что при нечетных k соответствующие слагаемые в сумме сократятся, а при четных удвоятся. Тогда, меняя местами интегрирование и суммирование, получаем

$$J_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot 2 \int\limits_0^a e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt + \underline{\mathrm{O}} \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} t^{2n}\,dt \right). \tag{1}$$

Исследуем интеграл под знаком суммы. Для начала разобьем его на два:

$$\int\limits_0^a e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt - \int\limits_a^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt.$$

Оценим для начала второй из интегралов. Тут все практически аналогично оценке $J_3(\lambda)$:

$$\int\limits_a^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt = \int\limits_a^{+\infty} e^{-t^2(\lambda-1)} e^{-t^2} t^{2k}\,dt \leqslant \int\limits_a^{+\infty} e^{-a^2(\lambda-1)} e^{-t^2} t^{2k}\,dt.$$

Получившийся интеграл сходится, а значит его можно ограничить числом M. «Внесем» также в константу M число e^{a^2}. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt = \underline{\mathrm{O}}(e^{-\lambda a^2}).$$

Осталось лишь разобраться с последним оставшимся интегралом, который и дает асимптотическую оценку факториала:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\, dt.$$

Сделаем в нем замену:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\, dt. = \left\{ \begin{matrix} \lambda t^2 = x & e^{-\lambda t^2} = e^{-x} \\ t = \sqrt{\dfrac{x}{\lambda}} & t^{2k} = \dfrac{x^k}{\lambda^k} \\ dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x\lambda}} & \end{matrix} \right\} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{k-\frac{1}{2}}}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}\, dx.$$

Теперь, вынося константу $\frac{1}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}$, мы получаем в точности гамма-функцию:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\, dt = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Воспользуемся той же заменой для оценки $\underline{\mathrm{O}}$ в (1):

$$\underline{\mathrm{O}}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} t^{2n}\, dt\right) = \underline{\mathrm{O}}\left(\int\limits_{-\lambda a^2}^{\lambda a^2} \frac{e^{-x} x^{n-\frac{1}{2}}}{2\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right) = \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right).$$

т.к. в скобках имеем простой определенный интеграл, который ограничен.

Наконец, собирая в кучу, получаем, что

$$J(\lambda) = J_2(\lambda) + \underline{\mathrm{O}}(e^{-\lambda a^2}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot 2 \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}} + \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}} + \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right).$$

Вычислим первые два члена этого ряда. Собственно говоря, чтобы получить формулу, указанную в условии, нужно вычислить не только первые два члена, но и несколько следующих, т.е. последовательно вычисляя члены ряда, можно получать значение факториала со сколь угодно большой точностью. Однако мы ограничимся двумя первыми членами.

Для начала вычислим значения гамма-функции. При $k = 0$ имеем $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ — это значение мы уже вычисляли ранее. При $k = 1 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Что касается производных $\varphi(t)$, то воспользуемся следующим приемом. Выше мы показали, что

$$\frac{dg^2(x)}{dx} = \frac{x}{1+x} = 2g(x)g'(x).$$

Возьмем последнее равенство и подставим $x = \varphi(t)$. Тогда $g(x) = t$. Напоминаем также, что поскольку $\varphi(t) = g^{-1}(x)$, то $g'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$:

$$\frac{\varphi(t)}{1+\varphi(t)} = 2t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \Leftrightarrow \varphi(t)\varphi'(t) = 2t(1+\varphi(t)).$$

Продифференцируем теперь обе части полученного равенства:

$$(\varphi'(t))^2 + \varphi(t)\varphi''(t) = 2(1 + \varphi(t)) + 2t(\varphi'(t)).$$

Теперь подставим $t = 0$. Учитывая, что $\varphi(t) = 0$ (поскольку $g(0) = 0$),

$$(\varphi'(0))^2 = 2 \Rightarrow \varphi'(0) = \sqrt{2}.$$

Аналогично можно вычислить, что $\varphi'''(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Наконец, мы можем вернуться к факториалу:

$$\lambda! = \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^\lambda} J(\lambda) = \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}} + \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right)\right) =$$
$$= \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^\lambda}\left(\frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)\right) = \frac{\lambda^\lambda}{e^\lambda}\sqrt{2\pi\lambda}\left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\lambda} + \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right).$$

[:||||:]

Часть 71
Криволинейные интегралы

1 Понятие криволинейных интегралов

Рассмотрим спрямляемую (т.е. имеющую длину) кривую без точек самопересечения и участков самоналожения, задаваемую уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где $t \in [a, b]$. Обозначим кривую как $\overset{\smile}{AB}$.

Будем говорить, что функция $F(x, y)$ **непрерывна на** $\overset{\smile}{AB}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \overset{\smile}{AB}\text{:}\ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Отметим, что на самом деле это определение *равномерной непрерывности*, которое в силу теоремы Кантора эквивалентно в данном случае определению обычной непрерывности, поскольку рассматриваемая кривая является компактом.

Предположим теперь, что вдоль $\overset{\smile}{AB}$

задана функция $f(x, y)$	заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$,

непрерывные на $\overset{\smile}{AB}$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ на n частей. При этом дуга $\overset{\smile}{AB}$ разобьется точками $M_k = (x_k, y_k)$, где $x_k = \varphi(t_k)$ и $y_k = \psi(t_k)$ на дуги $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$, $k = \overline{1, n}$.

Выберем на всех дугах $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$ произвольные точки $N_k = (\xi_k, \eta_k)$, т.е. $\forall k = \overline{1, n}$ выберем $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ и обозначим соответствующую точку на дуге как $N_k = (\xi_k = \varphi(\tau_k), \eta_k = \psi(\tau_k))$.

Предположим также, что функции φ и ψ дифференцируемы на $[a, b]$, и обозначим

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

Это не что иное, как длина дуги $\breve{M_{k-1}M_k}$. Условимся также обозначать с помощью l длину всей кривой $\breve{AB}$.

Составим сумму

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k.$$

Составим две суммы:

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}),$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}).$$

Назовем число I **пределом интегральной суммы** σ_s, $s = \overline{1, 3}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \text{ при } \max_k \Delta l_k < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |I - \sigma_s| < \varepsilon.$$

Тогда

если $\exists \lim\limits_{\max \Delta l_k \to 0} \sigma_1$, то этот предел называется **криволинейным интегралом 1 рода** от функции f по дуге $\breve{AB}$ и обозначается как $\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dl$.

если $\exists \lim\limits_{\max \Delta l_k \to 0} \sigma_2$ $\left(\lim\limits_{\max \Delta l_k \to 0} \sigma_3\right)$, то этот предел называется **криволинейным интегралом 2 рода** от функции $P(x, y)$ $(Q(x, y))$ и обозначается как $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)\, dx$ $\left(\int\limits_{\breve{AB}} Q(x, y)\, dy\right)$.

Если же сложить два упомянутых криволинейных интеграла 2 рода, то получится **общий КЛИ 2 рода** (будем использовать это сокращение и в дальнейшем), который принято обозначать как $\int\limits_{\breve{AB}} P\, dx + Q\, dy$.

Заметим, что КЛИ 1 рода не зависит от ориентации кривой (т.е. от того, в каком направлении — от A к B или от B к A пробегается кривая при увеличении t), а КЛИ 2 рода при изменении ориентации кривой меняет свой знак.

Отметим также, что данные определения обобщаются и на случай трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. Здесь КЛИ 2 рода будет уже три.

2 Существование КЛИ и их сведение к простым интегралам

Будем называть кривую $\breve{AB}$ **гладкой**, если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$.

Назовем точку, отвечающую значению параметра t, **особой**, если $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = 0$, т.е. обе производные обращаются в нуль при заданном t. В дальнейшем мы будем рассматривать гладкие кривые без особых точек, т.е. считать, что $\forall t \in [a, b] \Rightarrow (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \geqslant m > 0$.

Теорема 71.1. *Если кривая* $\breve{AB}$ *— гладкая, без особых точек, а* f, P, Q *непрерывны на* $\breve{AB}$*, то существуют следующие КЛИ:*

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt = K_1,$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = K_2,$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)\,dt = K_3.$$

Доказательство. Начнем с КЛИ 1 рода. Напоминаем, что

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\underbrace{\xi_k}_{\varphi(\tau_k)}, \underbrace{\eta_k}_{\psi(\tau_k)}) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Перепишем K_1 с помощью аддитивности:

$$K_1 = \sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Тогда

$$|\sigma_1 - K_1| \leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)) - f(\varphi(t),\psi(t))|\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Функция f непрерывна как суперпозиция непрерывных функций, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : |\tau_k - t| < \delta \Rightarrow |f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)) - f(\varphi(t),\psi(t))| < \varepsilon.$$

Функции φ и ψ непрерывно дифференцируемы по условию, а значит по второй теореме Вейерштрасса $\exists m = \min\limits_{[a,b]} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}$. Тогда

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt \geqslant m(t_k - t_{k-1}) = m\Delta t_k \Rightarrow \Delta t_k \leqslant \frac{\Delta l_k}{m},$$

а значит $\Delta t_k \to 0$ при $\Delta l_k \to 0$. Вместе с упомянутой выше непрерывностью функции f (пользуемся тем, что $|\tau_k - t| \leqslant \Delta t_k \leqslant \frac{\Delta l_k}{m}$) это дает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : \text{ при } \max_k \Delta l_k < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)) - f(\varphi(t),\psi(t))| < \frac{\varepsilon}{l}.$$

Тогда при $\max\limits_k \Delta l_k \to 0$ получаем

$$|\sigma_1 - K_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt = \frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^n \Delta l_k = \varepsilon.$$

Но это означает, что $K_1 = \lim\limits_{\max \Delta l_k \to 0} \sigma_1$, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим КЛИ 2 рода. Преобразуем σ_2:

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))(x_k - x_{k-1}) = \left\{ x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt.$$

Опять-таки, перепишем K_2 с помощью аддитивности:

$$K_2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Тогда

$$|\sigma_2 - K_2| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\,dt.$$

Аналогично предыдущему случаю, пользуясь непрерывностью, можно показать, что

$$|P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))| \leqslant \frac{\varepsilon}{M(b-a)}, \text{ где } M = \max_{[a,b]} |\varphi'(t)|.$$

Тогда

$$|\sigma_2 - K_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot M \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство для σ_3 и K_3 аналогично приведенному. **[:||||:]**

Кривая l называется **кусочно-гладкой**, если она может быть разбита на не более, чем счетное число кусков гладких кривых без общих точек.

Можно отметить, что доказанная нами теорема справедлива и в случае кусочно-гладких кривых и кусочно-непрерывных функций.

Отметим также, что если кривая $\breve{AB}$ замкнута, т.е. $A = B$, то КЛИ по данной кривой принято обозначать как $\oint\limits_{\breve{AB}} f(x,y)\,dl$.

Опять-таки, аналогичные определения и рассмотренную теорему можно обобщить на случай многомерных пространств $\mathbb{R}^n$, где $n > 2$.

3 Свойства криволинейных интегралов

Вспомним, что в прошлом году мы доказали множество свойств для определенных интегралов. Благодаря теореме 71.1 эти же свойства справедливы и для криволинейных интегралов. Мы приводим их для КЛИ 1 рода, поскольку для КЛИ 2 рода они формулируются аналогично.

1. ***Аддитивность.***

   Если дуга $\overset{\smile}{AB}$ составлена из дуг $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{CB}$ и если для функции f существует криволинейный интеграл по дуге $\overset{\smile}{AB}$, то для этой же функции существуют криволинейные интегралы по каждой из дуг $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{CB}$, причем справедливо

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\overset{\smile}{AC}} f(x,y)\,dl + \int\limits_{\overset{\smile}{CB}} f(x,y)\,dl.$$

2. ***Линейность.***

   Если для каждой из функций f и g существует КЛИ по дуге $\overset{\smile}{AB}$, то для любых постоянных α и β справедливо

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y))\,dl = \alpha \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)\,dl \pm \beta \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} g(x,y)\,dl.$$

3. ***Интегрируемость модуля.***

   Если существует КЛИ по кривой $\overset{\smile}{AB}$ от функции f, то существует и КЛИ по кривой $\overset{\smile}{AB}$ от функции $|f|$, причем справедливо

$$\left|\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)\,dl\right| \leqslant \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} |f(x,y)|\,dl.$$

4. ***Интегральное неравенство.***

   Если существуют КЛИ по кривой $\overset{\smile}{AB}$ от функций f и g, причем $\forall (x,y) \in \overset{\smile}{AB} \Rightarrow f(x,y) \leqslant g(x,y)$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)\,dl \leqslant \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} g(x,y)\,dl.$$

5. ***Интегрируемость произведения***.

   Если существуют КЛИ по кривой $\overset{\smile}{AB}$ от функций f и g, то существует и КЛИ по кривой $\overset{\smile}{AB}$ от их произведения fg.

   Отметим, что интеграл произведения **не равен** произведению интегралов.

6. ***Теорема о среднем.***

   Если функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой $\overset{\smile}{AB}$, то на этой кривой найдется точка M^* такая, что

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)\,dl = l \cdot f(M^*),$$

   где l — длина кривой $\overset{\smile}{AB}$.

Часть 72
Поверхностные интегралы

1 Поверхность в трехмерном пространстве и ее площадь

Прежде чем изучать поверхностные интегралы, нужно определить само понятие *поверхности*, а также ее площади. Для этого нам потребуется ввести множество вспомогательных определений.

Отображение $f\colon G \mapsto G^*$ называется **гомеоморфизмом**, если

1. Существует обратное отображение f^{-1}.
2. f и f^{-1} непрерывны.

Иными словами, отображение f должно быть взаимно однозначным и взаимно непрерывным.

Область $G \subset T \subset \mathbb{R}^2$ называется **элементарной**, если она является образом некоторого круга D при гомеоморфизме D на T.

Связная область G называется **простой**, если любая точка этой области имеет окрестность, являющуюся элементарной областью.

Отображение $f\colon G \mapsto G^*$ называется **локальным гомеоморфизмом**, если любая точка области G имеет окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.

Наконец, множество точек $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ называется **поверхностью**, если оно является образом простой области G при локальном гомеоморфном отображении $G \mapsto \mathbb{R}^3$.

В качестве отображения мы будем рассматривать следующую параметризацию. Пусть на плоскости Ouv заданы функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ и $z = z(u,v)$. При $(u,v) \in G$ мы получаем отображение $(u,v) \in G \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$. При этом будем обозначать вектор $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ как $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$.

Потребуем также, чтобы

1. $x, y, z \in \mathrm{C}^1(G)$. Иными словами, будем рассматривать гладкие поверхности.
2. В области G матрица
$$A = \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$
имела ранг, равный 2. Иными словами, рассматриваются поверхности без особых точек.

Поверхность Φ будем называть **полной**, если любая фундаментальная последовательность точек из Φ сходится к пределу, лежащему в Φ. Мы будем рассматривать поверхность Φ, которая

1. является гладкой.
2. не имеет особых точек.
3. ограничена.
4. является полной.
5. является двусторонней.

Обозначим эти условия как *.

Отметим, что определить понятие площади можно и для таких поверхностей, которые не удовлетворяют последним двум требованиям. *Двустороннюю* поверхность можно формально представить следующим образом. Возьмем произвольную точку на поверхности и проведем в ней вектор нормали. Затем будем двигать этот вектор по поверхности, пока не обойдем ее полностью. Если, вернувшись в изначальную точку, вектор направлен в ту же сторону, то данная поверхность является двусторонней, а если в противоположную, то односторонней. Двусторонними поверхностями являются плоскость, сфера, эллипсоид и прочие. В качестве примеров односторонних поверхностей можно привести ленту Мёбиуса и бутылку Клейна.

Будем говорить, что **размер** П меньше δ, если эту поверхность можно погрузить в шар S диаметра δ. Разобьем поверхность Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число областей Φ_i, размером не превосходящих δ, так, что каждая из Φ_i однозначно бы проецировалась на касательную плоскость, проведенную в произвольной точке из Φ_i.

Обозначим через Δ максимальный размер областей Φ_i, а через σ_i — площадь проекции области Φ_i на касательную плоскость, проведенную в точке $N_i \in \Phi_i$.

Число σ называется **пределом сумм** $\sum\limits_i \sigma_i$ при $\Delta \to 0$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$: для любого разбиения Φ на Φ_i с $\Delta < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sigma - \sum\limits_i \sigma_i\right| < \varepsilon$ **вне зависимости от выбора** точек N_i.

Поверхность Φ, для которой существует предел σ при $\Delta \to 0$, называется **квадрируемой**, а число σ — ее **площадью**.

Теорема 72.1. *Если поверхность Φ удовлетворяет условиям (*), то она является квадрируемой. В случае, когда функции x, y, z, задающие данную поверхность, непрерывно дифференцируемы, ее площадь равна*

$$\sigma = \iint\limits_G \left|\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]\right| dudv, \ \textit{где}$$

$$\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \ \textit{— векторное произведение.}$$

Отметим, что если обозначить

$$(r'_u, r'_u) = E,$$
$$(r'_v, r'_v) = D,$$
$$(r'_u, r'_v) = F,$$

то указанную формулу можно упростить:

$$\sigma = \iint\limits_G \sqrt{ED - F^2}\, dudv.$$

Как и обычно в случае интегралов, мы считаем площадь поверхности с помощью разбиения ее на очень малые участки. На каждом таком участке (ввиду его малости) поверхность практически совпадает со своей касательной плоскостью (которая всегда существует в силу гладкости), проведенной в некоторой точке на данном участке. Спроецируем этот участок поверхности на касательную плоскость. Площадь полученной проекции мы уже умеем считать с помощью двойных интегралов. В итоге, интеграл определяется как предел суммы площадей проекций этих участков на касательные плоскости при бесконечно малом диаметре разбиения поверхности.

Будем считать функцию F **непрерывной** на поверхности Φ, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall M_1, M_2 \in \Phi : \rho(M_1, M_2) < \delta \Rightarrow |F(M_1) - F(M_2)| < \varepsilon.$$

По аналогии с определением непрерывности функции на кривой, в данном случае мы фактически записали определение равномерной непрерывности.

2 Поверхностные интегралы первого и второго рода

Теперь введем собственно понятия поверхностных интегралов. Напоминаем, что мы рассматриваем поверхность Φ, удовлетворяющую условиям (*). Разобьем Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число областей Φ_i. Опять-таки, обозначим через Δ максимальный из размеров Φ_i, а через σ_i — площадь проекции Φ_i на касательную плоскость. Как мы уже знаем,

$$\sigma_i = \iint\limits_{G_i \subset G} \sqrt{ED - F^2}\, dudv,$$

где G_i — прообраз Φ_i в G.

Пусть в каждой Φ_i выбраны произвольные точки N_i, и на Φ заданы функции f, P, Q, R, а $\bar{\eta} = \{\cos x_i, \cos y_i, \cos z_i\}$ — нормаль к поверхности Φ в точке N_i. Определим следующие суммы:

$$\Sigma_1 = \sum_i f(N_i)\sigma_i,$$
$$\Sigma_2 = \sum_i P(N_i)\cos x_i \sigma_i,$$
$$\Sigma_3 = \sum_i Q(N_i)\cos y_i \sigma_i,$$
$$\Sigma_4 = \sum_i R(N_i)\cos z_i \sigma_i.$$

Число I_k называется **пределом суммы** Σ_k при $\Delta \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$: для произвольного разбиения Φ на Φ_i с $\Delta < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |I_k - \Sigma_k| < \varepsilon$.

Если $\exists \lim\limits_{\Delta \to 0} \Sigma_1 = I_1$, то это число называется **поверхностным интегралом 1 рода** от функции f по поверхности Φ. Обозначается данный интеграл как

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} f(M)\, d\sigma.$$

Пределы сумм $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ (если они существуют) при $\Delta \to 0$ называются **поверхностными интегралами 2 рода**. Обозначаются они следующим образом:

$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} P(M)\cos x\, d\sigma,$$
$$I_3 = \iint\limits_{\Phi} Q(M)\cos y\, d\sigma,$$
$$I_4 = \iint\limits_{\Phi} R(M)\cos z\, d\sigma.$$

Их сумма $I_2 + I_3 + I_4$ называется **общим поверхностным интегралом** и обозначается как

$$\iint\limits_{\Phi} P(M)\cos x\, d\sigma + Q(M)\cos y\, d\sigma + R(M)\cos z\, d\sigma.$$

Если обозначить $\bar{A} = \{P, Q, R\}$, то данный общий интеграл можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Phi} (\bar{A}, \bar{\eta})\, d\sigma.$$

Этот интеграл принято называть **потоком**.
Исходя из данных определений, можно отметить следующее:

- Поверхностный интеграл 1 рода не зависит от ориентации нормали, а поверхностный интеграл 2 рода при замене ориентации нормали меняет знак на противоположный.
- Поверхностный интеграл 1 рода и общий поверхностный интеграл 2 рода инвариантны относительно выбора базиса.
- Если поверхность Φ замкнута, то положительной ориентацией нормали считается ориентация, направленная вверх.
- После выбора стороны поверхности поверхностные интегралы 2 рода можно преобразовывать в поверхностные интегралы 1 рода заменой $P(M)\cos x$ на $f(M)$.

Теорема 72.2 (***Существование поверхностных интегралов***). *Если поверхность Φ удовлетворяет условиям (*) и параметризуется уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, а функции $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вдоль поверхности Φ, то существуют все поверхностные интегралы первого и второго родов, для которых выполняется:*

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{G} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{ED - F^2}\, dudv = I_1,$$

$$\iint\limits_{\Phi} P(x, y, z)\cos x\, d\sigma = \iint\limits_{G} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\cos x\sqrt{ED - F^2}\, dudv = I_2,$$

$$\iint\limits_{\Phi} Q(x, y, z)\cos y\, d\sigma = \iint\limits_{G} Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\cos y\sqrt{ED - F^2}\, dudv = I_3,$$

$$\iint\limits_{\Phi} R(x, y, z)\cos z\, d\sigma = \iint\limits_{G} R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\cos z\sqrt{ED - F^2}\, dudv = I_4.$$

Доказательство. Докажем данную теорему для интеграла первого рода, остальное доказывается аналогично. Для начала заметим, что интеграл I_1 существует, поскольку по условию функция f непрерывна. Нам требуется доказать, что $\lim\limits_{d \to 0} \Sigma_1 = I_1$, где d — диаметр разбиения (ранее обозначался как Δ), а Σ_1, напоминаем, определяется как

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sigma_i, \text{ где } \sigma_i = \iint\limits_{G_i} \sqrt{ED - F^2}\, dudv.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью f, выберем такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\forall M_i,\, M \in \Phi : \rho(M_i, M) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(M_i) - f(M)| < \frac{\varepsilon}{|\Phi|}.$$

Перепишем I_1, пользуясь аддитивностью:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i \subset G} f(M)\sqrt{ED - F^2}\, dudv.$$

Рассмотрим теперь разность:

$$|\Sigma_1 - I_1| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \iint\limits_{G_i} \sqrt{ED - F^2}\, dudv - \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} f(M)\sqrt{ED - F^2}\, dudv \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} |f(M_i) - f(M)|\sqrt{ED - F^2}\, dudv <$$

$$< \frac{\varepsilon}{|\Phi|} \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} \sqrt{ED - F^2}\, dudv = \frac{\varepsilon}{|\Phi|} \cdot |\Phi| = \varepsilon.$$

[:||||:]

Пусть поверхность Φ задана уравнениями

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = z(x, y). \end{cases}$$

Иными словами, Φ является графиком функции $z(x, y)$. Тогда в интеграле

$$\iint\limits_{\Phi} R(x, y, z) \cos z \, d\sigma \tag{1}$$

можно посчитать (пользуясь теоремой 72.1)

$$d\sigma = \sqrt{ED - F^2}\, dxdy = \left| \bar{n} = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial z}{\partial y} \right] \right| dxdy = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dxdy =$$

$$= | - \bar{i} z'_x - \bar{j} z'_y + \bar{k}|\, dxdy = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy.$$

Здесь $\bar{n}$ — вектор нормали. Если рассмотреть сонаправленный с ним единичный вектор нормали $\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$, то

$$\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \left\{ \underbrace{-\frac{z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}}_{\cos x}, \underbrace{-\frac{z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}}_{\cos y}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}}_{\cos z} \right\}.$$

Тогда интеграл (1) равен

$$\iint\limits_{G} R(x, y, z(x, y))\, dxdy.$$

Таким образом, аналогично, для общего поверхностного интеграла 2 рода получаем

$$\iint\limits_{\Phi} (P\cos x + Q\cos y + R\cos z)\, d\sigma = \iint\limits_{G} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy. \qquad (2)$$

Часть 73
Теория поля

1 Биортогональный базис

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ два базиса: $\bar{r}_i = \{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3\}$ и $\bar{r}^i = \{\bar{r}^1, \bar{r}^2, \bar{r}^3\}$. Будем называть базисы $\bar{r}_i$ и $\bar{r}^i$ **биортогональными**, если

$$(\bar{r}_i, \bar{r}^k) = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \; i, k = 1, 2, 3.$$

Символ δ_i^k принято называть **символом Кронекера**.

Утверждение 73.1. *Для произвольного базиса $\{\bar{r}_i\}$ существует однозначно определенный биортогональный к нему базис.*

Доказательство. Убедимся, что вектор r^1 определяется единственным образом. По определению он ортогонален векторам r_2 и r_3, что однозначно определяет прямую его действия, т.е. $r^1 = \alpha[r_2, r_3]$. Условие $(r_1, r^1) = 1$ однозначно определяет уже сам вектор на этой прямой, поскольку из него однозначно определяется α:

$$(r_1, \alpha[r_2, r_3]) = 1,$$
$$\alpha = \frac{1}{(r_1, [r_2, r_3])} \Rightarrow r_1 = \frac{[r_2, r_3]}{(r_1, [r_2, r_3])}.$$

Аналогично и для r^2 с r^3:

$$\bar{r}^2 = \frac{[\bar{r}_1, \bar{r}_3]}{(r_2, [r_1, r_3])},$$
$$\bar{r}^3 = \frac{[\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{(r_3, [r_1, r_2])}.$$

Действительно, данные вектора биортогональны исходным:

$$(r_1, r^1) = \frac{(r_1, [r_2, r_3])}{(r_1, [r_2, r_3])} = 1,$$

$$(r_1, r^2) = \frac{(r_1, [r_1, r_3])}{(r_2, [r_1, r_3])} = \frac{(r_3, \overbrace{[r_1, r_1]}^{=0})}{(r_2, [r_1, r_3])} = 0.$$

Для остальных аналогично. Здесь мы воспользовались свойством смешанного произведения $(a, b, c) = (c, a, b)$. Осталось лишь доказать, что $\{r^1, r^2, r^3\}$ образуют базис. Для этого достаточно показать, что они линейно независимы, т.е. что их смешанное произведение отлично от нуля, т.е. $(r^1, r^2, r^3) \neq 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} r_1 &= \{x_1, y_1, z_1\}, \\ r_2 &= \{x_2, y_2, z_2\}, \\ r_3 &= \{x_3, y_3, z_3\}, \\ r^1 &= \{x^1, y^1, z^1\}, \\ r^2 &= \{x^2, y^2, z^2\}, \\ r^3 &= \{x^3, y^3, z^3\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$(r^1, r^2, r^3) = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим произведение смешанных произведений:

$$(r_1, r_2, r_3)(r^1, r^2, r^3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (r_1, r^1) & (r_1, r^2) & (r_1, r^3) \\ (r_2, r^1) & (r_2, r^2) & (r_2, r^3) \\ (r_3, r^1) & (r_3, r^2) & (r_3, r^3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что определитель не меняется при транспонировании и что произведение определителей равно определителю произведения.

Поскольку $(r_1, r_2, r_3) \neq 0$ (т.к. данные вектора образуют базис), то и $(r^1, r^2, r^3) \neq 0$. **[:||||:]**

Введем также следующий символ для упрощения обозначений:

$$a^{\textcircled{i}} e_{\textcircled{i}} = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i.$$

Здесь слева от знака равенства стоит скалярное произведение векторов a^i и e_i. Такое суммирование называется *суммированием по Эйнштейну*. Подразумевается, что суммирование происходит по обведенному кружком индексу. В тех случаях, когда понятно, что имеется в виду именно это суммирование, мы не будем рисовать этот кружок.

Рассмотрим теперь матрицы перехода от базисов к базисам $\{\bar{r}_i, \bar{r}^i\} \to \{\bar{r}_{i'}, \bar{r}^{i'}\}$:

$$\begin{cases} \bar{r}_i = b_i^{i'} r_{i'}, \\ \bar{r}^i = b_{i'}^i r^{i'}, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} r_{i'} = \widetilde{b}_{i'}^i r_i, \\ r^{i'} = \widetilde{b}_i^{i'} r^i. \end{cases}, \; i, i' = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Из курса линейной алгебры нам известно, что матрицы $(b_i^{i'})$ и $(\widetilde{b}_{i'}^i)$ взаимно обратны. То же касается и матриц $(b_{i'}^i)$ и $(\widetilde{b}_i^{i'})$. Утверждается, что

$$\begin{aligned} (b_i^{i'}) &= (\widetilde{b}_i^{i'}), \\ (b_{i'}^i) &= (\widetilde{b}_{i'}^i). \end{aligned}$$

Докажем первое утверждение, справедливость второго следует из него и замечания выше о взаимной обратности матриц. Домножим скалярно первое равенство в первой системе на $r^{k'}$, а второе равенство во второй системе на r_k. Получаем:

$$\begin{aligned} r_i r^{k'} &= b_i^{i'} (r_{i'} r^{k'}) = b_i^{i'} \delta_{i'}^{k'} = b_i^{k'}, \\ r^{i'} r_k &= \widetilde{b}_i^{i'} (r^i r_k) = \widetilde{b}_i^{i'} \delta_k^i = \widetilde{b}_k^{i'}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений при $k = i$ получаем

$$b_i^{i'} = r_i r^{i'},$$
$$\widetilde{b}_i^{i'} = r^{i'} r_i.$$

Правые части этих равенств равны, а значит равны и левые. Поскольку указанные равенства выполнены для любых $i, i' = 1, 2, 3$, то верно и $(b_i^{i'}) = (\widetilde{b}_i^{i'})$.

2 Дивергенция и ротор линейного оператора

Пусть A — линейный оператор. Назовем сумму $(r_{ⓘ}, Ar^{ⓘ}) = (\bar{r}_1, A\bar{r}^1) + (\bar{r}_2, A\bar{r}^2) + (\bar{r}_3, A\bar{r}^3)$ **дивергенцией** оператора A. Будем обозначать ее как $\operatorname{div} A$.

Сумму $[r_{ⓘ}, Ar^{ⓘ}]$ назовем **ротором** оператора A. Ее будем обозначать как $\operatorname{rot} A$.

Теорема 73.2. $\operatorname{div} A$ *и* $\operatorname{rot} A$ *инвариантны относительно выбора базиса, т.е.* $(r_i, Ar^i) = (r_{i'}, Ar^{i'})$ *и* $[r_i, Ar^i] = [r_{i'}, Ar^{i'}]$.

Доказательство. Докажем сначала для дивергенции. Пусть $(b_{i'}^i)$ — матрица перехода к базису $r_{i'}, r^{i'}$ от базиса r_i, r^i. Тогда

$$r_i = b_i^{i'} r_{i'},$$
$$r^i = b_{k'}^i r^{k'}.$$

Подставляя это в (r_i, Ar^i), получаем

$$(r_i, Ar^i) = (b_i^{i'} r_{i'}, A b_{k'}^i r^{k'}) = (b_i^{i'} b_{k'}^i)(r_{i'}, Ar^{k'}).$$

Учитывая, что $(b_i^{i'} b_{k'}^i) = \delta_{k'}^{i'}$ (эти числа, напомним, взаимно обратны), то

$$(r_i, Ar^i) = \delta_{k'}^{i'}(r_{i'}, Ar^{k'}) = (r_{i'}, Ar^{i'}).$$

Доказательство для ротора аналогично приведенному. **[:|||||:]**

Отметим, что из этой теоремы можно вывести следующее:

Следствие 73.3. $(r^i, Ar_i) = (r_i, Ar^i)$.

3 Дифференцируемость в векторном поле

Напоминаем, что в *векторном* поле каждой точке из рассматриваемой области ставится в соответствие некоторый вектор по аналогии со *скалярным* полем, где каждой точке ставится в соответствие число (таким образом, понятие скалярного поля и функции, заданной в некоторой области, совпадают).

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано произвольное векторное поле или векторная функция $\bar{p}(\bar{r})$, и рассмотрим произвольную точку $\bar{r}$.

Будем говорить, что векторное поле $\bar{p}(\bar{r})$ **дифференцируемо** в точке $\bar{r}$, если

$$\Delta\bar{p}(\bar{r}) = \bar{p}(\bar{r} + \Delta\bar{r}) - \bar{p}(\bar{r}) = A\Delta\bar{r} + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|), \tag{2}$$

где A — линейный оператор. Отметим, что данный оператор определяется однозначно. Указанное соотношение будем также называть ***условием дифференцируемости векторного поля***.

Рассмотрим дифференцируемое в точке M векторное поле $\bar{p}(\bar{r})$. **Дивергенцией дифференцируемого поля** $\bar{p}(\bar{r})$ называется дивергенция линейного оператора A из условия (2).

Ротором дифференцируемого поля $\bar{p}(\bar{r})$ называется по аналогии ротор оператора A.

Возьмем теперь произвольную точку M_0 и отложим от нее единичный вектор $\bar{e}$. Пусть на данном направлении лежит точка M. Обозначим длину $|M_0M| = l$. Иными словами, мы берем приращение $\Delta\bar{r} = l \cdot \Delta\bar{e}$. Тогда если существует предел $\lim\limits_{l\to 0} \frac{\Delta p}{l}$, где

$$\Delta p = p(M_0 + \Delta r) - p(M_0),$$

то он называется **производной по направлению** $\bar{e}$ в точке M_0 векторного поля $\bar{p}$. Обозначается как $\frac{\partial p(M_0)}{\partial e}$.

Теорема 73.4. *Пусть векторное поле $\bar{p}(\bar{r})$ дифференцируемо в точке M_0. Тогда у $\bar{p}(\bar{r})$ существуют производные по всем направлениям $\bar{e}$, которые могут быть вычислены по формуле*

$$\frac{\partial p(M_0)}{\partial e} = A\bar{e}. \tag{**}$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим производную по произвольному направлению. Для этого возьмем некоторый единичный вектор $\bar{e}$ и произвольное l и примем $\Delta\bar{r} = l\bar{e}$. Тогда

$$\lim_{l\to 0} \frac{\Delta p}{l} = \lim_{l\to 0} \left(\frac{A(l\bar{e})}{l} + \frac{\bar{o}(l\bar{e})}{l} \right) = \lim_{l\to 0} \left(\overbrace{\frac{A(l\bar{e})}{l}}^{=lA(\bar{e})} + \underbrace{\frac{\bar{o}(l)}{l}}_{\to 0} \right) = A\bar{e}.$$

[:|||||:]

4 Дивергенция и ротор в декартовой прямоугольной системе координат

Для удобства мы будем сокращать данную систему координат через ДПСК.

Рассмотрим произвольный базис $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ в $\mathbb{R}^3$ (а конкретно в ДПСК). Из курса линейной алгебры известно, что каждому линейному оператору A соответствует матрица (a_{ki}), причем результат применения этого оператора к $\bar{r}_i$ есть $A\bar{r}_i = a_{k i}\bar{r}_{k} = a_{1i}\bar{r}_1 + a_{2i}\bar{r}_2 + a_{3i}\bar{r}_3$.

Пусть $\bar{r}_1 = \bar{e}_1$, $\bar{r}_2 = \bar{e}_2$, $\bar{r}_3 = \bar{e}_3$, т.е. базис ортонормированный. Рассмотрим произвольное дифференциальное векторное поле. Возьмем некоторый вектор $\bar{p}$ с координатами (P, Q, R), т.е. $\bar{p} = \{P, Q, R\} = P\bar{e}_1 + Q\bar{e}_2 + R\bar{e}_3$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial x}\bar{e}_1 + \dfrac{\partial Q}{\partial x}\bar{e}_2 + \dfrac{\partial R}{\partial x}\bar{e}_3, \\ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y}\bar{e}_1 + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\bar{e}_2 + \dfrac{\partial R}{\partial y}\bar{e}_3, \\ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \dfrac{\partial P}{\partial z}\bar{e}_1 + \dfrac{\partial Q}{\partial z}\bar{e}_2 + \dfrac{\partial R}{\partial z}\bar{e}_3. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что в ортонормированном базисе приращение по каждой координате соответствует приращению по соответствующему базисному вектору. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}_1} \overset{(**)}{=} A\bar{e}_1 = a_{k1}\bar{e}_{k} = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \bar{a}_{31}\bar{e}_3, \\ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial y} = a_{k2}\bar{e}_{k}, \\ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial z} = a_{k3}\bar{e}_{k}. \end{cases} \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), получаем следующую матрицу (a_{ki}):

$$A = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}.$$

Тогда дивергенцию в ДПСК можно выразить следующим образом:

$$\operatorname{div} \bar{p} = (e^{i}, Ae_{i}) = (e^{i}, a_{\boxed{k}i}e_{\boxed{k}}) = \left\{(e^i, e_k) = \delta^i_k\right\} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = P'_x + Q'_y + R'_z.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(e^i, e_k) = 1 \Leftrightarrow i = k$.

И если вспомнить теперь понятие *градиента* $\bar{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$, то тогда дивергенция записывается просто как $\operatorname{div} \bar{p} = (\bar{\nabla}, \bar{p})$.

Теперь вычислим ротор в ДПСК:

$$\operatorname{rot} \bar{p} = [e^{i}, Ae_{i}] = [e^{i}, a_{\boxed{k}i}e_{\boxed{k}}].$$

Вычислим часть этой суммы, например, при $i = 1$:

$$[\bar{e}^1, a_{k1}\bar{e}_{k}] = [\bar{e}^1, a_{11}\bar{e}_1] + [\bar{e}^1, a_{21}\bar{e}_2] + [\bar{e}^1, a_{31}\bar{e}_3] = a_{21}\bar{e}_3 - a_{31}\bar{e}_2,$$

т.к. базисы $\bar{e}^i$ и $\bar{e}_i$ биортогональны и ортонормированы.

Аналогично вычисляются и $[\bar{e}^2, a_{k2}\bar{e}_k]$ с $[\bar{e}^3, a_{k3}\bar{e}_k]$. В итоге, получаем

$$\operatorname{rot} \bar{p} = (a_{32} - a_{23})\bar{e}_1 + (a_{13} - a_{31})\bar{e}_2 + (a_{21} - a_{12})\bar{e}_3 = (R'_y - Q'_z)\bar{e}_1 + (P'_z - R'_x)\bar{e}_2 + (Q'_x - P'_y)\bar{e}_3 = \\ = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\bar{\nabla}, \bar{p}].$$

5 Повторные операции векторного поля

Рассмотрим произвольное дважды дифференцируемое векторное поле $\bar{p}$ и скалярное поле u. Тогда по определениям

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}&\colon \text{скаляр} \mapsto \text{вектор} \\ \operatorname{div}&\colon \text{вектор} \mapsto \text{скаляр} \\ \operatorname{rot}&\colon \text{вектор} \mapsto \text{вектор} \end{aligned}$$

А это значит, что можно рассмотреть операции $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{p})$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{p})$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{p})$, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$.

Утверждение 73.5. *В ДПСК выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{p}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{p}) - \Delta \bar{p}, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) &= 0, \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{p}) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство.

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$.

  Проведем доказательство в прямоугольной системе координат. В силу инвариантности ротора этого достаточно. Как известно, $\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. Теперь воспользуемся формулой для ротора в ДПСК:

  $$\operatorname{rot} \bar{p} = (R'_y - Q'_z)\bar{e}_1 + (P'_z - R'_x)\bar{e}_2 + (Q'_x - P'_y)\bar{e}_3.$$

  Получаем

  $$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\bar{e}_3 = 0.$$

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{p}) = 0$.

  Снова докажем утверждение в ДПСК. Дивергенция, напоминаем, также инвариантна относительно базиса. В ДПСК $\operatorname{rot} \bar{p}$ имеет координаты $\{R'_y - Q'_Z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\}$. Теперь, пользуясь формулой для дивергенции в ДПСК:

  $$\operatorname{div} \bar{p} = P'_x + Q'_y + R'_z,$$

  получаем

  $$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{p}) = \frac{\partial}{\partial x}(R'_y - Q'_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P'_z - R'_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q'_x - P'_y) = 0.$$

- $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

  Опять-таки, рассматриваем в ДПСК. $\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. Тогда

  $$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

  Отметим, что данный оператор принято называть *оператором Лапласа* и обозначать как Δu.

- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{p}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{p}) - \Delta \bar{p}$.

  В ДПСК имеем:

  $$\operatorname{rot} \bar{p} = (R'_y - Q'_z)\bar{e}_1 + (P'_z - R'_x)\bar{e}_2 + (Q'_x - P'_y)\bar{e}_3.$$

  Тогда

  $$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{p}) = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}\right)\bar{e}_2 + \\ + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y}\right)\bar{e}_3. \end{aligned}$$

Справа же получаем:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{p}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{e}_3.$$

$\Delta\bar{p}$ же равно (оператор Лапласа):

$$\Delta\bar{p} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{e}_3.$$

Вычитая, получаем в точности то, что и требовалось доказать:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{p}) - \Delta\bar{p} = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\bar{e}_2 + \\ + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\right)\bar{e}_3.$$

[:|||||:]

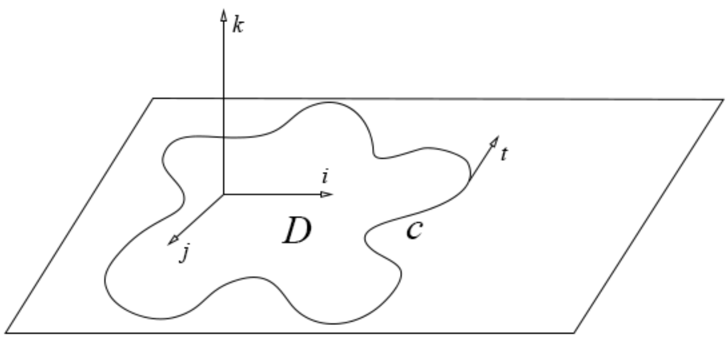
Часть 74
Основные формулы интегрального исчисления

1 Формула Грина

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ произвольную плоскость Π, на которой задана область D, а $\partial D = C$ — ее граница, удовлетворяющая условиям:

1. C есть гладкий или кусочно-гладкий контур.
2. Любая прямая, параллельная осям координат, пересекает контур C только в двух точках.

Будем считать, что $\bar{t}$ — касательный вектор C, согласованный с вектором $\bar{k}$ (т.е. если смотреть сверху, с вектора $\bar{k}$, то $\bar{t}$ движется против часовой стрелки).



Теорема 74.1. *Пусть векторное поле $\bar{p}$ дифференцируемо в области $D \cup C$, D удовлетворяет условиям (1) и (2) и имеет непрерывные производные по любому направлению в $D \cup C$. Тогда справедлива формула Грина:*

$$\iint\limits_D (\operatorname{rot} \bar{p}, \bar{k})\, d\sigma = \oint\limits_C (\bar{p}, \bar{t})\, dl. \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку D — плоское, то $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $R = 0$. Тогда $\bar{t} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \{\cos\alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, 0\}$, где α, β, γ — углы с осями координат. Опять-таки, ввиду того, что D плоское и $z = const$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (\underbrace{z'_x}_{=0})^2 + (\underbrace{z'_y}_{=0})^2}\, dxdy = dxdy.$$

Аналогично,

$$\operatorname{rot} \bar{p} = (R'_y - Q'_z)\bar{i} + (P'_z - R'_x)\bar{j} + (Q'_x - P'_y)\bar{k} = (Q'_x - P'_y)\bar{k}.$$

Умножая скалярно обе части на $\bar{k}$, получаем, что $(\operatorname{rot} \bar{p}, \bar{k}) = Q'_x - P'_y$. Учитывая, что $\bar{t} = \{\cos\alpha, \sin\alpha, 0\}$, имеем $(\bar{p}, \bar{t}) = P\cos\alpha + Q\sin\alpha$. А значит нам нужно доказать, что

$$\iint\limits_D (Q'_x - P'_y)\, dxdy = \oint\limits_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\, dl = \oint\limits_C P\, dx + Q\, dy. \tag{2}$$

Для этого докажем, что

$$-\iint\limits_D P'_y\, dxdy = \oint\limits_C P\, dx, \tag{3}$$

$$\iint\limits_D Q'_x\, dxdy = \oint\limits_C Q\, dy. \tag{4}$$

Пусть x_1 и x_2 — наименьшая и наибольшая абсциссы области D. Определим $C_1 : \{x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\, y = y_1(x)\}$ и $C_2 : \{x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\, y = y_2(x)\}$. Тогда $C = C_1 \cup C_2$ в силу условия 2. Воспользуемся теперь формулой приведения двойного интеграла к повторному:

$$-\iint\limits_D P'_y\, dxdy = -\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} P'_y\, dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x, y_1(x))\, dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x, y_2(x))\, dx =$$

$$= \int\limits_{C_1} P\, dx - \left(-\int\limits_{C_2} P\, dx \right) = \int\limits_{C_1} P\, dx + \int\limits_{C_2} P\, dx = \oint\limits_C P\, dx.$$

Доказательство (4) аналогично приведенному. **[:|||||:]**

Отметим, что левая часть в формуле (1) — это не что иное, как поток вектора $\bar{p}$ через поверхность D. Справа же написана циркуляция вектора $\bar{p}$ по контуру C. Также заметим, что

- Формула Грина справедлива и для областей, которые конечным числом кусочно-гладких кривых приводятся к областям, удовлетворяющим условиям (1), (2).

- Формула Грина справедлива и в том случае, когда векторное поле $\bar{p}$, непрерывное в $D \cup C$, дифференцируемо только в области D, а производные по любому направлению существуют только в D. В этом случае интегралы от производных понимаются как несобственные.

- Требования (1), (2) не являются необходимыми, но без них доказательство формулы существенно усложняется.

- На практике обычно используется не приведенная в условии инвариантная формулировка формулы, а непосредственно формула (2).

2 Условие независимости КЛИ второго рода на плоскости от пути интегрирования

Утверждение 74.2. *Пусть две функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны в открытой ограниченной области **D**, тогда следующие три утверждения эквивалентны друг другу.*

1) $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0$ *для любого замкнутого кусочно-гладкого контура, не содержащего особых точек и лежащего в **D**.*

2) *Для любых двух точек **A** и **B** из области **D**, и для любой кривой, соединяющей эти две точки, являющейся кусочно-гладкой, не имеющей особых точек и целиком лежащей в **D**, интеграл* $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ *один и тот же.*

3) *В области **D** существует функция $u(x;y) = u(M)$, такая что*

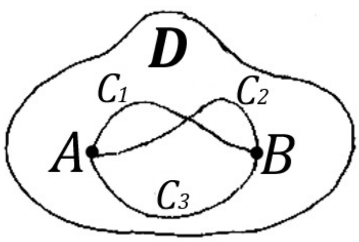
   - $du = Pdx + Qdy$,
   - $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A)$ (4),

   *для любых точек **A** и **B** из области **D** и любого кусочно-гладкого, без особых точек контура, соединяющего эти точки и целиком лежащего в **D**.*

Доказательство.

- **1) $\mapsto$ 2)**.

  Возьмём в области **D** точки **A** и **B**, и соединим их контурами AC_1B и AC_2B. Тогда существует третий контур AC_3B не имеющий общих точек с первыми двумя (без доказательства).



Пусть $L_1 = AC_1BC_3A,\ L_2 = AC_2BC_3A$, тогда $\oint\limits_{L_1} P\,dx + Q\,dy = 0 = \oint\limits_{L_2} P\,dx + Q\,dy$. Поэтому

$$\int\limits_{AC_1B} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{BC_3A} P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{AC_2B} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{BC_3A} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Откуда следует, что $\int\limits_{AC_1B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AC_2B} P\,dx + Q\,dy$.

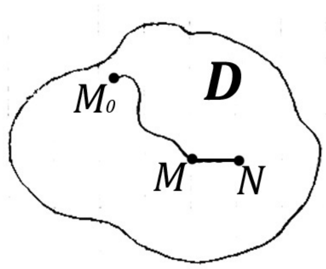
- **2) $\mapsto$ 3)**.

Фиксируем в **D** некоторую точку $M_0(x_0; y_0)$ и пусть $M(x; y)$ — произвольная точка из **D**. Определим $u(x; y) = u(M) = \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy$. Докажем, что эта функция имеет в каждой точке **M** области **D** непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, более того, $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = P(M)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M) = Q(M)$. Ограничимся доказательством того, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывна и равна $P(M)$.

Сместимся от точки $M(x; y)$ к $N(x + \Delta x; y) \in \mathbf{D}$.

$$u(x + \Delta x; y) = \int\limits_{M_0MN} P\,dx + Q\,dy,$$

$$u(x + \Delta x; y) - u(x; y) = \int\limits_{MN} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{MN} P\,dx,$$



т.к. y на этом участке не меняется и $Q\,dy = 0$.

$$\exists \theta \in (0; 1) : \int\limits_{MN} P\,dx = P(x + \theta\Delta x; y) \cdot \int\limits_{MN} dx = P(x + \theta\Delta x; y) \cdot \Delta x.$$

Мы получили, что $\frac{u(x+\Delta x;y)-u(x;y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x; y)$. Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x; y)$. Так как функция $P(x; y)$ непрерывна, то и $\frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывна, значит:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = Pdx + Qdy.$$

$$u(B) - u(A) = \int\limits_{M_0B} P\,dx + Q\,dy \; - \int\limits_{M_0A} P\,dx + Q\,dy \; = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy.$$

- <u>**3) $\mapsto$ 1)**</u>.

  Возьмём произвольный замкнутый, гладкий контур $\mathbf{L}$. Имеем:

  $$\oint\limits_{\mathbf{L}} P\,dx + Q\,dy = u(L') - u(L') = 0,$$

  по формуле (4), где L' - произвольная точка контура $\mathbf{L}$.

[:||||:]

Утверждение 74.3. *Предположим, что выполнены все условия утверждения 74.2, и дополнительно к ним требуется, чтобы область **D** была односвязной, и функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ имеют в этой области непрерывные частные производные первого порядка. Тогда любое из условий 1), 2), 3) будет эквивалентно следующему:*

4) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *всюду в области **D**.*

Доказательство.

- <u>**3) $\mapsto$ 4)**</u>.

  Предположим, что выполнено 3). Тогда по доказанному $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x;y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x;y)$. Поэтому

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y},$$
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

  Откуда, по теореме о равенстве смешанных производных, получим требуемое.

- <u>**4) $\mapsto$ 1)**</u>.

  Пусть в области $\mathbf{D}$ выбран замкнутый контур $\mathbf{L}$, ограничивающий область $\mathbf{G}$. Тогда, используя формулу Грина получаем:

  $$0 = \iint\limits_{\mathbf{G}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy \;=\; \oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy.$$

[:||||:]

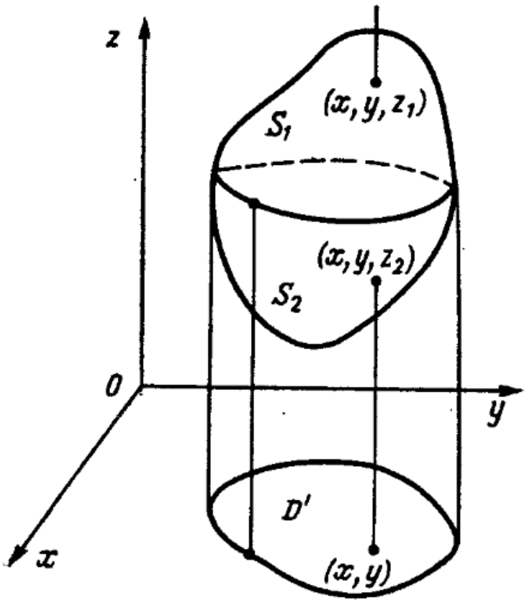
Часть 75
Основные формулы интегрального исчисления II

1 Формула Остроградского-Гаусса

Рассмотрим область $V \subset \mathbb{R}^3$. Пусть V ограничивает замкнутая поверхность S (удовлетворяющая условиям (*)). Пусть также выполнено:

1. Пусть $\bar{n}$ — единичный вектор нормали к S, а векторное пространство $\bar{p}$ непрерывно дифференцируемо в $V \cup S$.

2. Можно выбрать ДПСК так, чтобы любая прямая, параллельная осям координат, пересекала S не более, чем в двух точках.



Теорема 75.1. *Пусть S удовлетворяет условиям (*), а также выполняются условия 1 и 2. Тогда*

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \bar{p}\, dxdydz = \oiint\limits_S (\bar{p}, \bar{n})\, d\sigma.$$

Доказательство. Выберем ДПСК так, чтобы выполнялось условие 2. Пусть $\bar{p} = \{P, Q, R\}$, $\bar{n} = \{\cos x, \cos y, \cos z\}$. Тогда $\operatorname{div} \bar{p} = P'_x + Q'_y + R'_z$. Нужно доказать, что

$$\iiint\limits_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dxdydz = \oiint\limits_S (P\cos x + Q\cos y + R\cos z)\, d\sigma = \oiint\limits_S P\, dydz + Q\, dxdz + R\, dxdy,$$

где последний переход сделан, пользуясь равенством со страницы 234.

Для этого докажем, что

$$\iiint\limits_V P'_x\, dV = \oiint\limits_S P\, dydz,$$
$$\iiint\limits_V Q'_y\, dV = \oiint\limits_S Q\, dzdx,$$
$$\iiint\limits_V R'_z\, dV = \oiint\limits_S R\, dxdy,$$

где $dV = dxdydz$.

Разобьем поверхность S на два множества (это можно сделать в силу условия 2):

$$S_1 : z_1 = z_1(x, y),\ (x, y) \in D \text{ (нижняя часть области)},$$
$$S_2 : z_2 = z_2(x, y),\ (x, y) \in D \text{ (верхняя часть области)}.$$

(На картинке выше S_1 и S_2 обозначены наоборот, но не суть). Теперь приведем тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V R'_z\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} R'_z\,dz = \iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy - \iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy =$$

$$= \{\text{на поверхности } S_1 \Rightarrow \cos z < 0\} = \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\cos z\,d\sigma + \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\cos z\,d\sigma =$$

$$= \oiint\limits_S R(x,y,z)\cos z\,d\sigma = \oiint\limits_S R\,dxdy.$$

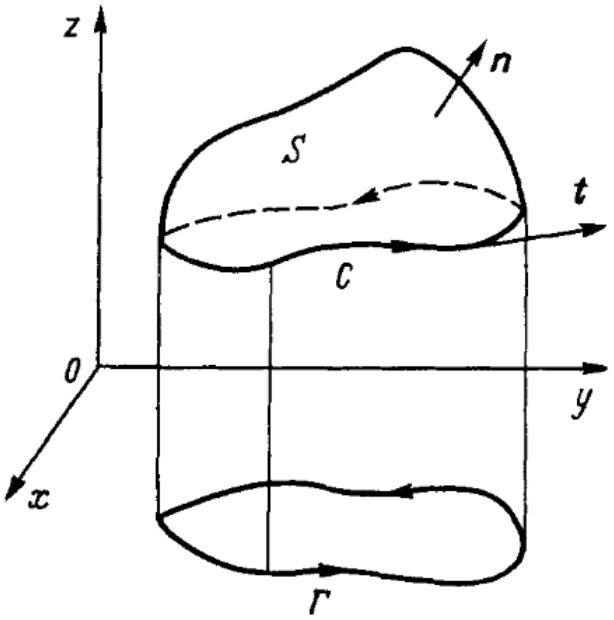
Для оставшихся двух интегралов доказательство аналогично приведенному. **[:|||||:]**

Отметим, что для формулы Остроградского-Гаусса применимы все замечания, которые мы делали для формулы Грина. Интеграл, стоящий в правой части формулы характеризует поток векторного поля $\{P,Q,R\}$ через поверхность S.

2 Формула Стокса

Рассмотрим поверхность S, такую что:

1. Она удовлетворяет условиям (*).
2. ДПСК можно выбрать так, чтобы S однозначно проецировалась на все координатные плоскости.



Теорема 75.2. *Пусть векторное поле $\bar{p}$ имеет непрерывные производные в любой непрерывной области, содержащей поверхность S, а также выполнены условия 1 и 2. Тогда*

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\bar{p},\bar{n})\,d\sigma = \oint\limits_c (\bar{p},\bar{t})\,dl.$$

Доказательство. Пусть в выбранной ДПСК $\bar{p} = \{P, Q, R\}$, $\bar{n} = \{\cos x, \cos y, \cos z\}$ и $\bar{t} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Тогда

$$\operatorname{rot}\bar{p} = \{R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\}.$$

А значит, нужно доказать, что

$$\iint\limits_S ((R'_y - Q'_z)\cos x + (P'_z - R'_x)\cos y + (Q'_x - P'_y)\cos z)\,d\sigma = \oint\limits_c (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \\ = \oint\limits_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \quad (1)$$

Снова для этого докажем три равенства:

$$\iint\limits_S (P'_z\cos y - P'_y\cos z)\,d\sigma = \oint\limits_c P\,dx,$$
$$\iint\limits_S (Q'_x\cos z - Q'_z\cos x)\,d\sigma = \oint\limits_c Q\,dy,$$
$$\iint\limits_S (R'_y\cos x - R'_x\cos y)\,d\sigma = \oint\limits_c R\,dz.$$

Обозначим левую часть первого равенства как I. Вспомним, что

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy,$$
$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}},$$
$$\cos y = -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} = -z'_y\cos z.$$

Тогда

$$I = -\iint\limits_S (P'_z z'_y + P'_y)\cos z\,d\sigma.$$

Заметим, что в скобках имеем не что иное, как формулу полной производной P по y:

$$I = -\iint\limits_D \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y}\,dxdy.$$

Пользуясь теперь формулой Грина (неинвариантной записью со страницы 241), получаем, что

$$I = \oint\limits_c P(x, y, z(x, y))\,dx.$$

Оставшиеся два равенства доказываются аналогично. **[:||||:]**

В правой части формулы записана циркуляция вектора $\bar{p}$ по контуру c. Заметим, что справедлива ***формула Стокса в общем виде***:

$$\boxed{\int\limits_\sigma d\omega = \int\limits_{\partial\sigma}\omega}.$$

А теперь можно заметить, что если подставить $\sigma = [a, b]$, то получаем

$$\int\limits_{[a,b]} df = \int\limits_{[a,b]} f'\,dx = f(b) - f(a),$$

что есть не что иное, как формула Ньютона-Лейбница.

На практике обычно используется не приведенная формула в инвариантном виде, а непосредственно формула (1). При этом можно заметить, что формула Грина является ее частным случаем при $R = 0$. Действительно, обе формулы выражают циркуляцию по контуру C, но формула Грина делает это на плоскости, а формула Стокса в более общем случае.

В следующей лемме доказывается, что от требования 2 в условии теоремы можно отказаться.

Лемма 75.3 (*Об однозначном проецировании на координатной плоскости*). *Если S удовлетворяет условиям (*), то $\exists\delta > 0$ такое, что S можно разбить на части не больше δ, каждая из которых однозначно проецируется на координатные плоскости.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $M \in S$. Построим касательную плоскость и единичный вектор нормали $\bar{n}$ к S в этой точке. Пусть $\bar{n}$ составляет острые углы со всеми координатными осями, т.е. $\bar{n} = \{\underbrace{\cos x}_{>0}, \underbrace{\cos y}_{>0}, \underbrace{\cos z}_{>0}\}$. Тогда в матрице

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

все миноры второго порядка положительны. Тогда в силу непрерывности этих миноров $\forall M \in S\ \exists\delta = \delta(M) > 0$: в $\mathrm{U}_\delta(M)$ данные миноры сохраняют знак. Докажем, что можно выбрать δ, подходящее для всех точек из S одновременно.

От противного. Пусть такое δ подобрать нельзя, т.е. точная нижняя грань по всем δ равна 0. Это возможно, только если среди δ есть бесконечно малая последовательность. Пусть $\exists\{\delta_n\} = \frac{1}{n}$, причем $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists M_n \in S$: окрестность этой точки не проецируется однозначно. Последовательность $\{M_n\}$ — ограниченная (т.к. область ограничена), а значит по теореме Больцано-Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $\{M_{n_k}\} \to M_0 \in S$. У этой точки соответствующее δ должно быть равно 0, т.к. $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Но, как было показано выше, $\exists\delta(M_0) > 0$, т.е. пришли к противоречию. **[:||||:]**

Часть 76
Теория линейных пространств

1 Евклидово и псевдоевклидово пространство

В этом разделе мы обобщим введенные в прошлом году понятия скалярного произведения, нормы и прочих смежных, а также некоторые неравенства на случай функциональных и бесконечных пространств.

Линейное пространство L называется **евклидовым пространством** (сокращенно ЕП), если $\forall f, g \in L$ введено отображение (называемое **скалярным произведением**) $(f, g)\colon L \times L \mapsto \mathbb{R}$, которое удовлетворяет аксиомам:

1. ***Симметричность:*** $\forall f, g \in L \Rightarrow (f, g) = (g, f)$.

2. ***Линейность:*** $\forall f, g \in L$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha f \pm \beta g, h) = \alpha(f, h) \pm \beta(g, h)$.

3. ***Положительная определенность:*** $\forall f \in L \Rightarrow (f, f) \geqslant 0$, причем $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

Линейное пространство L называется **псевдоевклидовым пространством** (сокращенно ПЕП), если на нем может быть введено скалярное произведение, которое удовлетворяет аксиомам 1 и 2, но $(f, f) = 0$ достигается не только на нулевых элементах.

Отметим, что каждое ЕП является ПЕП, и все утверждения для ПЕП будут справедливы и для ЕП.

В качестве примера рассмотрим $\hat{\mathrm{C}}[a, b]$ — пространство кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций, имеющих конечное число разрывов I-ого рода в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. В этих точках доопределим значения функций как

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}.$$

Введем скалярное произведение следующим образом:

$$(f, g)_{\hat{\mathrm{C}}} = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Докажем, что данное пространство с таким скалярным произведением является евклидовым.

1. $(f, g)_{\hat{\mathrm{C}}} = (g, f)_{\hat{\mathrm{C}}}$ в силу $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx$.

2. Линейность тоже легко проверяется непосредственной подстановкой:

$$(\alpha f \pm \beta g, h)_{\hat{\mathrm{C}}} = \int\limits_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))h(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx \pm \beta \int\limits_a^b g(x)h(x)\,dx = \\ = \alpha(f, h)_{\hat{\mathrm{C}}} \pm \beta(g, h)_{\hat{\mathrm{C}}}.$$

3. $(f, f)_{\hat{\mathrm{C}}} = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0$. Отметим, что $(f, f)_{\hat{\mathrm{C}}} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

   Действительно, отрезок $[a, b]$ разбивается на $n + 1$ отрезок точками $x_1, \ldots, x_n$, на которых функция f непрерывна, если в качестве значений на концах брать соответственно значения левых и правых пределов. В курсе прошлого года мы доказали теорему, что если $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ и $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) > 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$. Тогда $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда и $f(x_i - 0) = f(x_i + 0) = 0 \Rightarrow f(x_i) = 0$, а значит $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Примером псевдоевклидово пространства служит $L[a, b]$ — пространство интегрируемых на $[a, b]$ функций. Действительно, первые 2 свойства доказываются аналогично. Свойство 3 же не выполняется. В качестве примера можно рассмотреть функцию, которая всюду равна 0, кроме одной точки, в которой она равна 1. Интеграл по такой функции (и по ее квадрату) равен 0, хотя сама функция тождественно не равна 0 на $[a, b]$.

Пространство L называется **бесконечномерным**, если $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется n линейно независимых элементов пространства L.

Утверждение 76.1 (*Неравенство Коши-Буняковского*). $\forall f, g \Rightarrow (f, g)^2 \leqslant (f, f) \cdot (g, g)$.

2 Нормированные и псевдонормированные пространства

Линейное пространство L называется **нормированным**, если $\forall f \in L$ введено отображение (называемое **нормой**) $\|f\| \colon L \mapsto \mathbb{R}$, которое удовлетворяет аксиомам:

1. ***Неравенство треугольника:*** $\forall f, g \in L \Rightarrow \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.
2. $\forall f \in L$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$.
3. $\forall f \in L \Rightarrow \|f\| \geqslant 0$, причем $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

Линейное пространство L называется **псевдонормированным**, если $\forall f \in L$ введена норма, которая удовлетворяет аксиомам 1 и 2, но $\|f\| = 0$ и при $f \neq 0$.

Утверждение 76.2. *Всякое ЕП (ПЕП) можно сделать нормированным (псевдонормированным), положив* $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Доказательство. Аксиома нормированного пространства 3 следует из аксиомы 3 скалярного произведения. Аксиома 2 также справедлива:

$$\|\alpha \cdot f\| = \sqrt{(\alpha f, \alpha f)} = |\alpha| \sqrt{(f, f)} = |\alpha| \cdot \|f\|.$$

Для неравенства треугольника же имеем:

$$\|f + g\| = \sqrt{(f + g, f + g)} = \sqrt{(f, f) + 2(f, g) + (g, g)} \leqslant \{\text{неравенство К-Б}\} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(f, f) + 2\sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)} + (g, g)} = \sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)} = \|f\| + \|g\|.$$

[:||||:]

Отметим, что в пространствах $L[a, b]$ и $\hat{\mathrm{C}}[a, b]$ неравенство треугольника имеет вид:

$$\sqrt{\int\limits_a^b (f(x) + g(x))^2 \, dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x) \, dx} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x) \, dx}.$$

Оно называется **неравенством Минковского**.

В ЕП (ПЕП) можно ввести понятие **угла** между двумя элементами: $\varphi = (\widehat{f, g})$. Его косинус определяется как

$$\cos \varphi = \frac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|}, \ 0 < \varphi < \pi.$$

Отметим при этом, что

$$|\cos \varphi| = \frac{|(f, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} \leqslant \{\text{неравенство К-Б}\} \leqslant \frac{\|f\| \cdot \|g\|}{\|f\| \cdot \|g\|} = 1.$$

Два элемента f и g называются **ортогональными**, если $(f, g) = 0$. В качестве примера можно привести $|x| \perp \operatorname{sgn} x$ в $L[-1, 1]$. Действительно,

$$\int_{-1}^{1} |x| \operatorname{sgn} x \, dx = \int_{-1}^{1} x \, dx = 0.$$

Система элементов $\{\psi_j\} \in L$ называется **ортогональной**, если $\forall j \neq k \Rightarrow (\psi_j, \psi_k) = 0$. Важным примером такой системы служит *тригонометрическая система функций* $\{1, \cos kx, \sin kx\}$ в пространствах $L[-\pi, \pi]$ и $\hat{\mathrm{C}}[-\pi, \pi]$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Система элементов $\{\psi_j\} \in L$ называется **ортонормированной**, если $(\psi_j, \psi_k) = \delta_j^k$ — символ Кронекера, который, напомним, определяется как

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Опять-таки, важным примером такой системы является система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

в $L[-\pi, \pi]$ и $\hat{\mathrm{C}}[-\pi, \pi]$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Часть 77

Задача о наилучшем приближении элементов евклидового пространства

1 Ряд Фурье по ортонормированной системе

Рассмотрим некоторую линейную комбинацию $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ (где $\{\psi_k\}$ — ортонормированная система, а n — размерность пространства). Ее **отклонением** от элемента $f \in L$ по норме w данного пространства L называется величина

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|_w.$$

Попробуем минимизировать это отклонение (для упрощения минимизируем его квадрат, что то же самое), найдя соответствующие $\{c_k\}$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k, f - \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j \right) =$$

$$= (f, f) - \left(f, \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right) - \left(f, \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j \right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_k c_j \cdot (\psi_k, \psi_j) =$$

$$= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Примем $(f, \psi_k) = f_k$. Прибавим и вычтем из получившегося результата сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$. Получаем

$$\|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2.$$

Как минимизировать данную сумму? Очевидно, нужно взять $c_k = f_k$. В итоге,

$$\min_{c_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$ называется **рядом Фурье** функции f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$. f_k — коэффициент ряда Фурье, а $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ — его n-ая частичная сумма.

Таким образом, мы доказали следующую важную теорему:

Теорема 77.1. *Произвольный элемент $f \in L$ лучше всего приближает по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$ его n-ая частичная сумма ряда Фурье.*

Также мы посчитали и само минимальное отклонение:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{1}$$

Это тождество справедливо $\forall f \in L$ и для любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$. Оно называется **тождеством Бесселя**. Поскольку данное отклонение минимально, то справедлива оценка

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{2}$$

Теорема 77.2 (*Неравенство Бесселя*). *Для любого $f \in L$ и для любой ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$ справедливо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Доказательство. Из тождества (1) в силу неотрицательности нормы следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{3}$$

Поскольку $f_k^2 \geqslant 0$, а n-ая частичная сумма ограничена сверху, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ сходится. Поэтому, переходя к пределу в (3) при $n \to \infty$, получаем требуемое. **[:|||||:]**

Важно отметить, что в $L[-\pi, \pi]$ ряд Фурье по функции f по тригонометрической системе функций имеет вид

$$\frac{\widetilde{f}_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{f}_k}{\sqrt{\pi}} \cos kx + \frac{\widetilde{\widetilde{f}}_k}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right),$$

где

$$\widetilde{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$\widetilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx,$$

$$\widetilde{\widetilde{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx.$$

Отметим, что тригонометрический ряд Фурье обычно принято записывать немного в другом виде. А именно:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_0 = \frac{2\widetilde{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{\widetilde{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{\widetilde{\widetilde{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx.$$

Часть 78
Замкнутые и полные системы в евклидовом (псевдоевклидовом) пространстве

1 Определения и основные теоремы

Ортонормированная система (в дальнейшем ОНС) $\{\psi_k\}$ в произвольном ПЕП называется **замкнутой**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists c_1, \ldots, c_n : \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\| < \varepsilon.$$

ОНС $\{\psi_k\}$ в произвольном ПЕП называется **полной**, если из того, что $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f \perp \psi_k$ следует $f \equiv 0$.

Теорема 78.1 (***Тождество Парсеваля***)**.** *В ПЕП для замкнутой ОНС неравенство Бесселя* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant \|f\|^2$ *переходит в тождество* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное ε. Тогда по определению замкнутости и в силу (2) $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists c_1, \ldots, c_n$:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|^2 < \varepsilon^2 = \varepsilon'.$$

Но тогда тем более $\forall m \geqslant n$ выполняется

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2 \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|^2 < \varepsilon'.$$

Иными словами, мы показали, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant n \Rightarrow 0 \leqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2 < \varepsilon',$$

а это и означает, что $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$. **[:|||||:]**

Для тригонометрической системы функций тождество Парсеваля принимает вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Здесь появилось деление на π справа, поскольку мы немного изменили вид тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 78.2. *Если ОНС $\{\psi_k\}$ является замкнутой в ПЕП, то $\forall f \in$ ПЕП его ряд Фурье сходится к f по норме данного ПЕП, т.е.*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\| = 0.$$

Доказательство. Это прямое следствие из тождества Парсеваля. Действительно,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Тогда и $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$ **[:|||||:]**

В пространстве $L[-\pi, \pi]$ данный факт имеет вид

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \psi_k(x) \right)^2 dx} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

что называется *сходимостью в интегральном среднем.*

Теорема 78.3. *В ЕП замкнутая ОНС $\{\psi_k\}$ является полной.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $f \in$ ЕП. Пусть $\forall k \Rightarrow f \perp \psi_k$, т.е. $\forall f_k = 0$. В силу замкнутости системы справедливо тождество Парсеваля, т.е. $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0$. Тогда из свойства положительной определенности в ЕП следует, что $f \equiv 0$. **[:||||:]**

Теорема 78.4. *Пусть ОНС $\{\psi_k\}$ является замкнутой в ЕП, и пусть для элементов $f, g \in$ ЕП совпадают все элементы рядов Фурье. Тогда $f \equiv g$.*

Доказательство. Пусть $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f_k = g_k$. Тогда $(f-g)_k = 0$, а значит $(f-g)$ ортогонально всем элементам системы $\{\psi_k\}$. Тогда из предыдущей теоремы следует, что $(f-g) \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv g$. **[:||||:]**

Отметим, что понятие замкнутости и полноты необязательно вводить именно для ОНС — достаточно взять любую систему линейно независимых векторов.

2 Замкнутость тригонометрической системы и ее свойства

Рассмотрим 2π-периодическую функцию f, интегрируемую на $\mathbb{R}$.

Лемма 78.5. *Для $f(x)$ интеграл по произвольному сегменту длины периода является постоянным, т.е.*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Распишем интеграл слева:

$$\int\limits_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi-\alpha}^{-\pi} f(x)\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \int\limits_{\pi}^{\pi-\alpha} f(x)\,dx.$$

Сделаем теперь в первом интеграле замену $t = x + 2\pi$. Получаем

$$\int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi} \underbrace{f(t-2\pi)}_{=f(t)}\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \int\limits_{\pi}^{\pi-\alpha} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

[:||||:]

Пусть f — 2π-периодическая. Напомним, что для тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Теорема 78.6. *Справедливо тождество*

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\underbrace{\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\text{Ядро Дирихле}}\,dt.$$

Доказательство. Подставляя в $S_n(x,f)$ коэффициенты ряда Фурье

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\,dy,\ k=\overline{0,n}, \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ky\,dy,\ k=\overline{1,n}, \end{cases}$$

получаем

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(\cos ky\cdot\cos kx+\sin ky\cdot\sin kx)}_{\cos k(y-x)}\right)dy = \left\{\begin{array}{r} t=y-x \\ dt=dy \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt.$$

Теперь упростим сумму в скобках. Для начала заметим, что

$$2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos kt = \sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)-\sin\left(t\left(k-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos kt = -\sin\frac{t}{2}+\sin\left(t\left(n+\frac{1}{2}\right)\right).$$

А значит, деля на $2\sin\frac{t}{2}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin\left(t\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}.$$

[:||||:]

Рассмотрим теперь чезаровские средние n-ых частичных сумм тригонометрического ряда Фурье

$$\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,f)+S_1(x,f)+\dots+S_{n-1}(x,f)}{n}.$$

Теорема 78.7. *Справедливо тождество*

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\underbrace{\frac{\sin^2\frac{tn}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}}_{\text{Ядро Фейера}}\,dt.$$

Доказательство. Пользуясь предыдущей теоремой,

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt.$$

Посчитаем сумму в скобках. Заметим, что

$$2\sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\sin\frac{t}{2}=\cos tk-\cos t(k+1).$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1}2\sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\sin\frac{t}{2}=1-\cos tn=2\sin^2\frac{tn}{2}.$$

А значит,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\sin^2\frac{tn}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

В итоге,

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{tn}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt.$$

[:|||||:]

Для удобства мы будем обычно обозначать ядро Фейера как $\Phi_n(t)$, а ядро Дирихле как $D_n(t)$.

Часть 79
Теоремы Вейерштрасса

1 Теорема Фейера

Теорема 79.1. *Пусть* $f(x)\in \mathrm{C}[-\pi,\pi]$ *и* $f(-\pi)=f(\pi)$. *Тогда* $\sigma_n(x,f)\xrightarrow[n\to\infty]{[-\pi,\pi]} f(x)$.

Прежде чем привести доказательство, сделаем несколько замечаний. Для начала стоит заметить, что указанное условие, вообще говоря, является критерием (но мы приведем только доказательство теоремы в одну сторону).

Предположим, что $f(x)=1$. Рассмотрим частичные суммы ее ряда Фурье, для этого посчитаем коэффициенты:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx=2,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=0.$$

Тогда $S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} = 1 \Rightarrow \sigma_n(x,f) = 1$. А из этого следует, что

$$\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = 1. \tag{2}$$

Вывод этих формул без теории рядов Фурье вряд ли возможен. А теперь докажем саму теорему.

Доказательство. Для начала продолжим 2π-периодически функцию $f(x)$ на $\mathbb{R}$. Получим функцию, равномерно непрерывную на $\mathbb{R}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной непрерывности

$$\exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall t : 0 < |t| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Нужно доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in [-\pi,\pi] \Rightarrow |\sigma_n(x,f) - f(x)| < \varepsilon.$$

Распишем $f(x)$, используя (1), как

$$f(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt.$$

Пользуясь этой записью, получаем

$$|\sigma_n(x,f) - f(x)| = \frac{1}{\pi n}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t) - f(x))\Phi_n(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|\Phi_n(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\delta}^{\delta}|f(x+t) - f(x)|\Phi_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta<|t|<\pi}|f(x+t) - f(x)|\Phi_n(t)\,dt.$$

Обозначим первый из интегралов как I_1, а второй как I_2, и оценим их отдельно. Начнем с I_1. Пользуясь равномерной непрерывностью,

$$|I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\,dt \overset{\Phi_n(t)\geqslant 0}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь оценим I_2:

$$|I_2| = \frac{1}{\pi n}\left|\int\limits_{\delta<|t|<\pi}|f(x+t) - f(x)|\Phi_n(t)\,dt\right|.$$

Поскольку $f(x) \in \mathrm{C}[-\pi,\pi]$ (и пользуясь периодическим доопределением), то $\exists M > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| \leqslant M$. Тогда

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant |f(x+t)| + |f(x)| \leqslant 2M.$$

Тогда

$$|I_2| \leqslant \frac{2M}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int\limits_{\delta<|t|<\pi} \Phi_n(t)\, dt$$

Оценим ядро Фейера:

$$\left|\sin^2 \frac{nt}{2}\right| \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{2\sin^2 \frac{\delta}{2}}\right|.$$

Получаем, что

$$|I_2| \leqslant \frac{2M}{\pi} \cdot \frac{1}{2\sin^2 \frac{\delta}{2}} \cdot \frac{1}{n} \int\limits_{\delta<|t|<\pi} dt = \frac{const}{n}.$$

А значит, мы всегда можем выбрать такое n, что это выражение не будет превышать $\frac{\varepsilon}{2}$. В итоге, получаем, что $|\sigma_n(x, f) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. **[:|||||:]**

2 Теоремы Вейерштрасса

Будем называть **тригонометрическим многочленом** конечную линейную комбинацию $\sin$ и $\cos$, т.е.

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Теорема 79.2 (*О приближении непрерывной функции тригонометрическими многочленами*). *Пусть $f(x) \in \mathrm{C}[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T(x) : \forall x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Следует из теоремы Фейера. Достаточно заметить, что $\sigma_n(x, f)$ — тригонометрический многочлен. **[:|||||:]**

Обратите внимание, что $T(x)$ предъявляется **отдельно** для каждого ε. В общем случае нельзя найти $T(x)$, удовлетворяющее условию теоремы сразу для всех $\varepsilon > 0$.

Теорема 79.3 (*О приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами*). *Если $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$, то*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P(x) : \forall x \in [a, b] \Rightarrow |P(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

где $P(x)$ — алгебраический многочлен.

Доказательство. Пусть $t = \pi\frac{x-a}{b-a}$. Таким образом мы сделали отображение $[a, b] \to [0, \pi]$. Тогда $x = t\frac{b-a}{\pi} + a$ и $f(x) = f\left(t\frac{b-a}{\pi} + a\right) = \varphi(t)$.

Продолжим $\varphi(t)$ с $[0, \pi]$ на $[-\pi, \pi]$ четно. Тогда выполняется $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. Значит, по теореме 79.2 $\forall \varepsilon > 0\ \exists T(t)$ — тригонометрический многочлен такой, что

$$\forall t \in [-\pi, \pi] \Rightarrow |\varphi(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тригонометрический многочлен $T(t)$ можно в свою очередь приблизить, сколь угодно точно, частичной суммой ряда Тейлора, которая представляет из себя алгебраический многочлен. Пусть $|T(t) - Q_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$|\varphi(t) - Q_n(t)| \leqslant |\varphi(t) - T(t)| + |T(t) - Q_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $t = \pi\frac{x-a}{b-a}$, то можно получить алгебраический многочлен уже относительно x: $Q_n(t) = Q_n\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right) = P(x)$. Наконец, возвращаясь обратно к $f(x)$, пользуясь отображением $\varphi(t) \mapsto f(x)$, получаем

$$\forall\varepsilon > 0,\ \forall x \in [a, b]\ \exists P(x) \text{ — алг. мн-н} : |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

[:||||:]

Часть 80

Замкнутость тригонометрической системы элементов

1 Замкнутость в ПЕП

Теорема 80.1. *Тригонометрическая система функций замкнута в ПЕП $L[-\pi, \pi]$, и тем более в ЕП $\hat{\mathrm{C}}[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Для любой функции $f \in L[-\pi, \pi] \Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M$. Доказательство теоремы производится в 3 этапа.

1. Построим такую кусочно-непрерывную функцию $f_1(x)$, что $\|f - f_1\|_L < \frac{\varepsilon}{3}$. В силу интегрируемости $f(x)$ существует разбиение $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$ такое, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \underline{S}(f) < \frac{\varepsilon^2}{18M}, \text{ где } \underline{S}(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k.$$

Иными словами, $\underline{S}(f)$ — нижняя сумма Дарбу, т.е. $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Рассмотрим

$$f_1(x) = \begin{cases} m_k, & x \in (x_{k-1}, x_k),\ k = \overline{1, n}, \\ 0, & x = x_k,\ k = \overline{0, n}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f_1(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} m_k \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} dx = \underline{S}(f).$$

А значит,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_1(x))\,dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}.$$

Напоминаем, что

$$\|f(x)-f_1(x)\|_L=\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))^2\,dx}.$$

Оценим теперь эту норму:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))^2\,dx\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))(|f(x)|+|f_1(x)|)<\frac{\varepsilon^2}{9}.$$

В итоге, $\|f-f_1\|_L<\frac{\varepsilon}{3}$.

2. Теперь найдем такую непрерывную функцию $g(x)$, что $\|g-f_1\|_L<\frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $g(x)\in$ C$[-\pi,\pi]$. Построим ее следующим образом. $f_1(x)$ представляет из себя по определению множество несвязных отрезков. Отойдем на концах всех этих отрезков на маленькое δ внутрь отрезков и соединим последовательно полученные точки между собой.

   Обозначим через $B(x_i)$ окрестность точки x_i, которую мы получили, как сказано выше. Тогда

$$\|g-f_1\|_L^2=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(g(x)-f_1(x))^2\,dx=\overbrace{\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x_i)}(g(x)-f_1(x))^2\,dx}^{<\frac{\varepsilon^2}{9}}+\overbrace{\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x_i)}(g(x)-f_1(x))^2\,dx}^{=0}<\frac{\varepsilon^2}{9},$$

   т.е. $\|g-f_1\|_L<\frac{\varepsilon}{3}$.

3. По теореме Вейерштрасса $\exists T_n(x)$ — тригонометрический многочлен такой, что

$$\forall x\in[-\pi,\pi]\Rightarrow|g(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}.$$

   Тогда

$$\|g-T_n\|_L^2=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(x)-T_n(x)|^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{2\pi\cdot 9}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{\varepsilon^2}{9},$$

   т.е. $\|g-T_n\|_L<\frac{\varepsilon}{3}$.

Объединяя все, получаем, что

$$\|f-T_n\|_L\leqslant\|f-f_1\|_L+\|f_1-g\|_L+\|g-T_n\|_L<\varepsilon,$$

а это и означает, что тригонометрическая система замкнута. **[:||||:]**

2 Следствия из замкнутости тригонометрической системы функций

1. Для $\forall f\in L$ неравенство Бесселя для тригонометрической системы функций переходит в равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

2. Для $\forall f \in L$ ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней в среднеквадратичном (теорема 78.2).

3. Для $\forall f \in L$ ее тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать почленно (следует из того, что сходящийся в среднеквадратичном функциональный ряд можно интегрировать почленно).

4. Тригонометрическая система функций является полной в ЕП $\hat{\mathrm{C}}[-\pi, \pi]$, но она не является полной в ПЕП $L[-\pi, \pi]$.

   Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

   Очевидно, что $f(x) \in L[-\pi, \pi]$. Аналогично, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\psi_k(x)\,dx = 0$ для всех ψ_k из тригонометрической системы, но при этом $f(x) \not\equiv 0$.

5. Для двух неравных функций f и g тригонометрические коэффициенты рядов Фурье в ЕП не могут быть тождественны.

Часть 81
Локальная теорема Фейера и равномерная сходимость ТРФ

1 Локальная теорема Фейера

Теорема 81.1. *Пусть f 2π-периодична и интегрируема по любому конечному отрезку. Пусть также существуют конечные пределы $f(x_0 \pm 0)$. Тогда чезаровские средние* $\sigma_n(x_0, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Используя четность ядра Фейера, получаем

$$\frac{1}{\pi n} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Здесь последний переход сделан, пользуясь (1) со страницы 258. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ в силу существования конечных пределов:

$$\forall t \in (0, \delta)\ (t \in (-\delta, 0)) \Rightarrow |f(x_0 + t) - f(x_0 \pm 0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, записывая $\frac{1}{2}$ через ядро Фейера из (1):

$$\left|\sigma_n(x_0,f)-\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\right|=\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0+t)\Phi_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+t)\Phi_n(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0-0)\Phi_n(t)\,dt-\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+0)\Phi_n(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\Phi_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\Phi_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\Phi_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\delta}^{0}|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\Phi_n(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\delta}|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\Phi_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi}|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\Phi_n(t)\,dt.$$

Обозначим получившиеся интегралы как I_1, I_2, I_3, I_4. Рассмотрим I_1. В силу интегрируемости f она ограничена, а значит $|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\leqslant|f(x_0+t)|+|f(x_0-0)|\leqslant 2M$. В ядре Фейера сделаем следующие оценки:

$$\left|\sin^2\frac{nt}{2}\right|\leqslant 1,$$

$$\left|\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Тогда $|I_1|\leqslant const\cdot\frac{1}{n}$. Но тогда мы можем найти такое N, что это выражение будет меньше $\frac{\varepsilon}{4}$ для всех $n\geqslant N$.

Для I_2 воспользуемся следующей оценкой:

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\delta}^{0}|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\Phi_n(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\delta}^{0}\Phi_n(t)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}\Phi_n(t)\,dt=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично оцениваются I_3 и I_4. В итоге, мы получаем $|I_1|+|I_2|+|I_3|+|I_4|<\varepsilon$, что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

Теорема 81.2. *Пусть $f(x)$ 2π-периодична и интегрируема, и пусть ее ТРФ сходится в точке x_0, в которой f непрерывна (имеет разрыв 1-ого рода). Тогда $S_n(x_0,f)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x_0)$ $(S_n(x_0,f)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)))$.*

Доказательство. Пусть $S_n(x_0,f)\xrightarrow[n\to\infty]{}A$. Тогда в силу регулярности метода Чезаро $\sigma_n(x_0,f)\xrightarrow[n\to\infty]{}A$. Но в силу теоремы 81.1 $\sigma_n(x_0,f)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x_0)$ $(\sigma_n(x_0,f)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0)))$. **[:|||||:]**

Теорема 81.3 (*Карлесона*). *Пусть $f(x)$ гарантирует существование интеграла Лебега $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$. Тогда ТРФ этой функции сходится почти всюду (т.е. всюду за исключением множества меры 0).*

Отметим, что позднее эта теорема была обобщена на случай $\forall p > 1$, т.е. теперь требуется существование $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx$. Для $p = 1$ же Колмогоровым был построен пример функции, интегрируемой по Лебегу, ТРФ которой расходится почти всюду.

2 Кусочно-непрерывная производная

Будем говорить, что $f(x)$ имеет **кусочно-непрерывную производную** на $[-\pi, \pi]$, если $\exists f'(x)$, являющаяся непрерывной за исключением конечного числа точек $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Потребуем, однако, существования $f'(x_i \pm 0)$, $f'(-\pi + 0)$ и $f'(\pi - 0)$. Будем говорить, что $f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную n-ого порядка ($n > 1$), если функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную.

Теорема 81.4 (*Простейшее условие равномерной сходимости ТРФ*). *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и f имеет кусочно-непрерывную производную. Тогда ее ТРФ сходится к ней равномерно на $[-\pi, \pi]$. Более того, равномерно сходится и ряд, состоящий из модулей.*

Доказательство. Докажем с помощью признака Вейерштрасса. Для начала заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| \cdot |\cos nx| + |b_n| \cdot |\sin nx|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|).$$

Докажем сходимость этого ряда. Пусть α_n, β_n — коэффициенты ТРФ для f'. Тогда

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \left.\frac{f(x) \cdot \cos nx}{\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n.$$

Аналогично, получаем $\beta_n = -na_n$. Из этого следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n}.$$

Поскольку $\left(|\alpha_n| - \frac{1}{n}\right)^2 \geqslant 0$, то, раскрывая скобки, $\frac{|\alpha_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(|\alpha_n|^2 + \frac{1}{n^2}\right)$. Как нам известно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Более того, из равенства Парсеваля следует, что сходится к норме функции f' ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2)$. А значит, пользуясь приведенной выше оценкой, получаем, что сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n}$, что и требовалось доказать. **[:||||:]**

Предположим теперь, что выполнены следующие условия (обозначим их как (*)):

1. $f(x)$ и $f^{(k)}(x)$ для $k = \overline{1, m}$ непрерывны на $[-\pi, \pi]$.
2. $f^{(m+1)}(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi, \pi]$.
3. $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi), \ldots,$ $f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi)$.

Лемма 81.5. *Пусть для $f(x)$ выполнены условия (*). Тогда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k| + |b_k|)$, где a_k, b_k — коэффициенты ТРФ функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть α_k, β_k — коэффициенты ТРФ функции $f^{(m+1)}(x)$. Тогда

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \cos kx \, dx \right| + \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \sin kx \, dx \right|.$$

Теперь, по частям интегрируя правую часть $m+1$ раз (один шаг был приведен в доказательстве предыдущей теоремы), получаем

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}(|a_k| + |b_k|).$$

Но тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k| + |b_k|) \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{k}$, а сходимость этого ряда была доказана в предыдущей теореме. **[:|||||:]**

Теорема 81.6 (*О почленном дифференцировании ТРФ*). *Пусть для функции f выполнены условия (*). Тогда ТРФ этой функции можно дифференцировать почленно m раз. Причем ряд, полученный m-кратным дифференцированием, сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к соответствующей производной.*

Доказательство. Формально продифференцируем ТРФ функции f S раз, где $S = \overline{1, m}$ и оценим получившийся ряд с модулями:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^s \left(|a_k| \cdot \left| \cos\left(kx + \frac{\pi s}{2} \right) \right| + |b_k| \cdot \left| \sin\left(kx + \frac{\pi s}{2} \right) \right| \right) \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k| + |b_k|),$$

а сходимость данного ряда доказана нами в предыдущей лемме. Сходимость же исходного ряда доказана в теореме 81.4. Теперь для обоснования корректности приведенного выше формального дифференцирования нужно просто воспользоваться теоремой 56.4. **[:|||||:]**

Часть 82

Модуль непрерывности функции

Здесь мы вспомним введенное в конце 1-ого курса понятие модуля непрерывности функции и докажем некоторые связанные с ним свойства.

Назовем **модулем непрерывности** функции f на $[-\pi, \pi]$ величину

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{x', x'' \in [-\pi, \pi] \\ |x' - x''| < \delta}} |f(x') - f(x'')| = \sup_{\substack{x, h+x \in [-\pi, \pi] \\ |h| < \delta}} |f(x+h) - f(x)|.$$

Утверждение 82.1. *Напоминаем, что если $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом же отрезке, а значит из определения следует, что $\lim\limits_{\delta \to 0+0} \omega(\delta, f) = 0$.*

Пусть $f(x)$ интегрируема по сегменту $[-\pi - \delta, \pi + \delta]$ для некоторого $\delta > 0$. Назовем величину

$$\sup_{\substack{x, x+h \in [-\pi, \pi] \\ |h| < \delta}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+h)| \, dx = \hat{\omega}(\delta, f)$$

интегральным модулем непрерывности.

Теорема 82.2. *Пусть $f(x)$ интегрируема по любому конечному сегменту и 2π-периодична. Тогда* $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \hat{\omega}(\delta, f) = 0$.

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) : \forall h : 0 < |h| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+h)|\, dx < \varepsilon.$$

Из теоремы 80.1 мы знаем, что $\exists g(x) \in \mathrm{C}[-\pi, \pi]$ такая, что $g(-\pi) = g(\pi)$ и $\|f - g\|_L < \frac{\varepsilon}{3}$. Расписывая последнее подробнее (для удобства чуть изменим оценку этой нормы):

$$\|f - g\|_L = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2\, dx} < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Теперь, пользуясь неравенством треугольника,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+h)|\, dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g(x+h)|\, dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x+h) - f(x+h)|\, dx.$$

Обозначим последовательно получившиеся интегралы как I_1, I_2, I_3. Заметим, что

$$I_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g(x+h)|\, dx \leqslant \omega(\delta, g) \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi\omega(\delta, g).$$

Поскольку $g(x) \in \mathrm{C}[-\pi, \pi]$, то из утверждения 82.1 следует, что $I_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.
Для I_3 сделаем замену:

$$I_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x+h) - f(x+h)|\, dx = \{y = x+h\} = \int\limits_{-\pi+h}^{\pi+h} |g(y) - f(y)|\, dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(y) - f(y)|\, dy,$$

т.к. f по условию 2π-периодична. Значит, осталось оценить I_1. Для этого воспользуемся неравенством Коши-Буняковского (утверждение 76.1):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx \leqslant \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

В итоге, $I_1 + I_2 + I_3 < \varepsilon$, что и требовалось доказать. **[:|||||:]**

В дальнейшем мы часто будем пользоваться 2π-периодичными и интегрируемыми по любому конечному сегменту функциями, поэтому обозначим это условие как (**).

Пусть f и g удовлетворяют (**). Рассмотрим $F_x(t) = f(x+t)g(t)$. Здесь x — параметр, и индекс x мы не будем писать для краткости.

Лемма 82.3. $\hat{\omega}(\delta, F) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} 0$ *по* x *при* $\delta \to 0+0$.

Доказательство. Для начала оценим модуль разности $|F(t+h)-F(t)|$, входящий в $\hat\omega(\delta, F)$:

$$\begin{aligned}|F(t+h)-F(t)| &= |f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t)| = \\ &= |f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t+h)+f(x+t)g(t+h)-f(x+t)g(t)| \leqslant \\ &\leqslant |g(t+h)|\cdot|f(x+t+h)-f(x+t)|+|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|.\end{aligned}$$

В силу интегрируемости f и g ограничены, а значит $|g(t+h)|, |f(x+t)| \leqslant M$. Заметим также, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)-f(x+t)|\,dt = \{y=x+t\} = \int\limits_{-\pi+t}^{\pi+t} |f(y+h)-f(y)|\,dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(y+h)-f(y)|\,dy.$$

Тогда

$$\hat\omega(\delta, F) = \sup_{\substack{t, t+h\in[-\pi,\pi]\\ |h|<\delta}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |F(t+h)-F(t)|\,dt \leqslant M\hat\omega(\delta, f)+M\hat\omega(\delta, g).$$

А $\hat\omega(\delta, f) \xrightarrow[\delta\to 0+0]{} 0$ и $\hat\omega(\delta, g) \xrightarrow[\delta\to 0+0]{} 0$ по теореме 82.2. **[:|||||:]**

Лемма 82.4. *Пусть f удовлетворяет (**). Тогда коэффициенты ее ТРФ удовлетворяют неравенству*

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2} \leqslant \frac{1}{2\pi}\hat\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right).$$

Доказательство. Отметим, что левая часть приведенного неравенства является модулем комплексного числа a_n+ib_n, поэтому нам понадобятся некоторые свойства комплексных чисел. Напоминаем, что по формуле Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, в частности $e^{i\pi}=-1$.

Рассмотрим теперь a_n+ib_n:

$$\begin{aligned}a_n+ib_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt + \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt}_{I_1} = \left\{t=y+\frac{\pi}{n}\right\} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(y+\frac{\pi}{n}\right)e^{iny}\,dy = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(y+\frac{\pi}{n}\right)e^{iny}\,dy}_{I_2},\end{aligned}$$

т.к. f по условию 2π-периодична, а e^{iny} имеет тот же период по формуле Эйлера.

Представим теперь a_n+ib_n в виде полусуммы I_1 и I_2:

$$a_n+ib_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{int}\left(f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right)\,dt.$$

А значит,

$$|a_n+ib_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |e^{int}|\cdot\left|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\hat\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right),$$

т.к. $|e^{int}|=1$. **[:|||||:]**

Из доказанного неравенства вытекают такие же, но относительно a_n и b_n:

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\hat{\omega}\left(\frac{\pi}{n}, f\right),$$
$$|b_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\hat{\omega}\left(\frac{\pi}{n}, f\right),$$

т.к. $|a_n|, |b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Следствие 82.5. *Пусть $f(t)$ удовлетворяет (**), а $g(t)$ интегрируема по $[-\pi, \pi]$. Тогда $a_n(F), b_n(F) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Напоминаем, что

$$a_n(F) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos nt\,dt,$$
$$b_n(F) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin nt\,dt.$$

Продолжим g 2π-периодично на $\mathbb{R}$. Тогда по лемме 82.3 $\hat{\omega}(\delta, F) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} 0$ при $\delta \to 0+0$. По лемме 82.4 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqslant \frac{1}{2\pi}\hat{\omega}\left(\frac{\pi}{n}, F\right) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$. Учитывая сделанное выше замечание, что $|a_n|, |b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, получаем требуемое. **[:|||||:]**

Следствие 82.6. *Пусть f удовлетворяет (**), а $g \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$. Тогда*

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,dt \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Для начала раскроем синус суммы:

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t = \sin\frac{t}{2}\cos nt + \cos\frac{t}{2}\sin nt.$$

Тогда

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt\,dt \leqslant a_n(x) + b_n(x) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} 0$$

при $n \to \infty$ по предыдущему следствию. **[:|||||:]**

Введем следующие функции:

$$\hat{c}_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$
$$c_n^+ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant t\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$
$$c_n^- = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi\leqslant t\leqslant-\delta} f(x+t)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Зафиксируем некоторое δ из $(0, x)$.

Следствие 82.7. *Пусть f удовлетворяет (**). Тогда функции $\hat{c}_n(x), c_n^+(x), c_n^-(x)$ стремятся к 0 равномерно на $[-\pi, \pi]$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Для $\hat{c}_n(x)$ возьмем в качестве $g(t)$ функцию

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \text{если } \delta \leqslant |t| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $c_n^+(x)$ возьмем

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \text{если } \delta \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наконец, для $c_n^-(x)$ возьмем

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \text{если } -\pi \leqslant t \leqslant -\delta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теперь воспользуемся следствием 82.6. **[:|||||:]**

Часть 83

Условие сходимости ТРФ в точке

1 Принцип локализации Римана

Теорема 83.1. *Пусть $f(t)$ удовлетворяет (**). Тогда сходимость ее ТРФ в точке x зависит только от значения аргумента из $\mathrm{U}_\delta(x)$.*

Доказательство. Запишем n-ую частичную сумму ряда Фурье через ядро Дирихле (теорема 78.6):

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt.$$

Заметим теперь, что сходимость первого интеграла зависит только от значений аргумента f из $\mathrm{U}_\delta(x)$. Второй же интеграл сходится к 0 при $n \to \infty$ по следствию 82.7. **[:|||||:]**

2 Условие Гёльдера порядка α

Будем говорить, что функция f удовлетворяет **условию Гёльдера** с показателем α ($0 < \alpha \leqslant 1$) в точке x справа (слева), если выполнены 2 условия:

1. $\exists f(x+0) < \infty$ ($\exists f(x-0) < \infty$).
2. $\exists M, \delta > 0 : |f(x+t) - f(x+0)| \leqslant M \cdot |t|^\alpha$ при $0 < t < \delta$ (Или же $|f(x+t) - f(x-0)| \leqslant M \cdot |t|^\alpha$ при $-\delta < t < 0$).

Теорема 83.2 (***Условие сходимости ТРФ в точке***). *Пусть f удовлетворяет (**) и условию Гёльдера в точке x_0 с показателем α_1 $(0 < \alpha_1 \leqslant 1)$ справа и с показателем α_2 $(0 < \alpha_2 \leqslant 1)$ слева. Тогда ее ТРФ сходится в точке x_0 к выражению $\widetilde{f}(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.*

Доказательство. Поскольку f удовлетворяет условию Гёльдера, то

$$\exists M_1, \delta_1 : |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \leqslant M_1 t^{\alpha_1},\ 0 < t < \delta_1,$$
$$\exists M_2, \delta_2 : |f(x_0+t) - f(x_0-0)| \leqslant M_2 |t|^{\alpha_2},\ -\delta_2 < t < 0.$$

Выберем $M = \max\{M_1, M_2\}$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогда для заданных значений оба условия будут выполнены. Нужно доказать, что

$$|S_n(f, x_0) - \widetilde{f}(x_0)| = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t) \underbrace{\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi \sin\frac{t}{2}}}_{D_n(t)} \, dt - \widetilde{f}(x_0) \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Здесь мы записали $S_n(f, x_0)$ в интегральном виде, а также воспользовались ранее доказанным свойством $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1$ (страница 258). Обратите внимание, что мы для удобства включили деление на π в $D_n(t)$. Получаем:

$$|S_n(f, x_0) - \widetilde{f}(x_0)| = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x_0+t) - \widetilde{f}(x_0)) D_n(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \underbrace{\int\limits_{-\delta}^{\delta} (f(x_0+t) - \widetilde{f}(x_0)) D_n(t)\, dt}_{I_1} \right| + \left| \underbrace{\int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x_0+t) D_n(t)\, dt + \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \widetilde{f}(x_0) D_n(t)\, dt}_{I_2} \right|.$$

Отметим, что $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ по следствию 82.7. Оценим теперь I_1:

$$I_1 = \int\limits_{-\delta}^{\delta} (f(x_0+t) - \widetilde{f}(x_0)) D_n(t)\, dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t) D_n(t)\, dt - \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2} \cdot \int\limits_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\, dt.$$

В силу четности ядра Дирихле $D_n(t) = D_n(-t)$, а значит справедливо

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\, dt = 2 \int\limits_{-\delta}^{0} D_n(t)\, dt = 2 \int\limits_{0}^{\delta} D_n(t)\, dt.$$

Поэтому получаем:

$$I_1 = \int\limits_{-\delta}^{0} (f(x_0+t) - f(x_0-0)) D_n(t)\, dt + \int\limits_{0}^{\delta} (f(x_0+t) - f(x_0+0)) D_n(t)\, dt.$$

Теперь оценим ядро Дирихле:

$$|D_n(t)| = \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right| \leqslant 1}{2\pi \left|\sin\frac{t}{2}\right|} \leqslant \frac{\pi}{2|t|\pi},$$

т.к. $\sin\frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{\pi}$ при $t \in (0,\pi)$ (легко увидеть на графике), а значит $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi}{t}$. В итоге, пользуясь этой оценкой и условием Гёльдера:

$$I_1 \leqslant M\int\limits_{-\delta}^{0} |t|^\alpha \frac{\pi}{2\pi|t|}\,dt + M\int\limits_{0}^{\delta} t^\alpha \frac{\pi}{2\pi t}\,dt = M\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt = M\frac{\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Получили то, что и требовалось доказать

$$|S_n(f,x_0) - \widetilde{f}(x_0)| \leqslant |I_1| + |I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[:||||:]

Часть 84
Равномерная сходимость ТРФ II

Будем говорить, что f принадлежит **классу Гёльдера с показателем** α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ (и обозначать это как $f \in \mathrm{C}^\alpha[-\pi,\pi]$), если $\omega(\delta,f) = \underline{\mathrm{O}}(\delta^\alpha)$, т.е.

$$\exists M > 0, \delta > 0 : \sup_{|x_1-x_2|<\delta} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M\delta^\alpha.$$

Из этого определения можно заметить, что

- Если $f \in \mathrm{C}^\alpha[-\pi,\pi]$, то $\omega(\delta,f) = \bar{\mathrm{o}}(1)$ при $\delta \to 0+0$.
- Если f имеет ограниченную производную, т.е. $\exists M > 0 : |f'(x)| \leqslant M$, то по теореме Лагранжа $|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''| \leqslant M\delta$, т.е. $f(x) \in \mathrm{C}^1$ на рассматриваемом отрезке.

Будем называть непрерывную функцию f принадлежащей **классу Дини-Липшица** на $[-\pi,\pi]$, если

$$\omega(\delta,f) = \bar{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}\right) \text{ при } \delta \to 0+0.$$

Иными словами, $\omega(\delta,f)\cdot\ln\frac{1}{\delta} \xrightarrow[\delta\to0+0]{} 0$. Отметим, что класс Дини-Липшица шире, чем класс Гёльдера $\forall 0 < \alpha \leqslant 1$. Т.е. если $f \in \mathrm{C}^\alpha[-\pi,\pi]$, то f лежит и в классе Дини-Липшица, т.к.

$$0 \leqslant \omega(\delta,f)\ln\frac{1}{\delta} \leqslant M\delta^\alpha \ln\frac{1}{\delta} \xrightarrow[\delta\to0+0]{} 0.$$

Теорема 84.1 (***Теорема Дини-Липшица***). *Пусть $f \in \mathrm{C}[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и f принадлежит классу Дини-Липшица на $[-\pi,\pi]$. Тогда $S_n(x,f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$.*

Эта теорема приводится без доказательства. Отметим, что ее условие является окончательным для равномерной сходимости в терминах $\omega(\delta,f)$. Иными словами, нет такой функции (из пространства $L[-\pi,\pi]$), которая не попадает в класс Дини-Липшица, но для нее наблюдается равномерная сходимость. Из определения видно, что к классу Дини-Липшица относятся функции, бесконечно малые по отношению к приведенному выше логарифму. А вот если функция хотя бы сравнима с этим логарифмом, то данная теорема не выполняется. В частности, существует пример функции f, для которой $\omega(\delta,f) = \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}\right)$ при $\delta \to 0+0$ и ТРФ которой расходится на всюду плотном множестве $[-\pi,\pi]$.

Теорема 84.2 (***Равномерная сходимость ТРФ***)**.** *Пусть* $f \in \mathrm{C}^\alpha[-\pi,\pi]$ *и* $f(-\pi)=f(\pi)$. *Тогда* $S_n(x,f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. Периодически продолжим f на $\mathbb{R}$. Пусть $M = \sup\limits_{|x'-x''|<\delta} \frac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^\alpha}$ (эта величина также называется *константой Гёльдера*). Доказательство практически повторяет таковое в теореме 83.2:

$$|S_n(x,f)-f(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))D_n(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))D_n(t)\,dt\right| + \left|\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt\right| + \left|\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x)D_n(t)\,dt\right|.$$

Снова разбиваем это на 2 части I_1 и I_2. Как мы уже знаем, $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для I_1, аналогично оценивая, получаем

$$I_1 = \int\limits_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))D_n(t)\,dt \leqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} M|t|^\alpha D_n(t)\,dt \leqslant M\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{|t|^{\alpha-1}}{2}\,dt = M\frac{\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

[:||||:]

Теорема 84.3. *Пусть* $f \in \mathrm{C}^\alpha[a,b]$*, где* $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$. *Тогда* $S_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ *при* $n\to\infty$ *на* $\forall[a+\delta,b-\delta]$*, где* $\delta\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]$.

Будем называть функцию f **кусочно-гёльдеровой** на $[-\pi,\pi]$, если $[-\pi,\pi]=\bigcup\limits_{k=1}^{n}[x_{k-1},x_k]$ и $f\in\mathrm{C}^{\alpha_k}[x_{k-1},x_k]$. Иными словами, на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$ функция принадлежит классу Гёльдера с показателем α_k.

Отметим, что если f — кусочно-гёльдеровая на $\mathbb{R}$, то:

1. На любом конечном сегменте $S_n(x,f)$ сходится к f в среднем интегральном. Это следует из замкнутости тригонометрической системы.
2. $\forall x_0\in\mathbb{R} \Rightarrow S_n(x_0,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{f}(x_0)$ (из теоремы 83.2).
3. На всех отрезках гёльдеровости $S_n(x,f) \overset{[x_{k-1},x_k]}{\rightrightarrows} f(x)$ (теорема 84.3).

Проницательный читатель мог заметить, что при изучении теории рядов Фурье мы рассматривали все на отрезке $[-\pi,\pi]$. На самом деле вместо $[-\pi,\pi]$ можно использовать произвольный отрезок $[-l,l]$. Тогда

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l} + b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right),$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi.$$

Часть 85

Преобразование Фурье

1 Класс функций $L_1(\mathbb{R})$

Будем говорить, что функция $f(x)$ **принадлежит классу** $L_1(\mathbb{R})$, если:

1. f интегрируема по Риману по любому конечному отрезку.
2. Сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

В качестве примеров функций, принадлежащих классу $L_1(\mathbb{R})$, можно привести следующие:

- $e^{-|x|} \in L_1(\mathbb{R})$. Первое свойство выполняется в силу непрерывности функции, второе же очевидно проверяется непосредственным вычислением интеграла.
- $e^{-x^2} \in L_1(\mathbb{R})$. Опять-таки, первое свойство следует из непрерывности функции, второе же справедливо, поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{-x^2}|\,dx = \sqrt{\pi}$ — интеграл Пуассона (модуль, очевидно, ни на что не влияет).
- $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при $a > 1$, где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^a}, & |x| > 2, \\ 0, & |x| \leqslant 2. \end{cases}$$

2 Основная лемма об образе Фурье

Сейчас мы докажем одну из главных теорем в теории Фурье.

Теорема 85.1. *Если $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то для нее сходится интеграл*

$$\boxed{\hat{f}(y) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} f(x)\,dx},$$

*называемый образом или **преобразованием Фурье** функции f. Причем $\hat{f}(y)$ является непрерывной $\forall y \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{|y|\to\infty} \hat{f}(y) = 0$.*

Доказательство. Сразу заметим, что 1-ая часть утверждения не представляет особой трудности. Действительно, поскольку $|e^{iyx}| = 1$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{iyx} f(x)|\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \to,$$

т.к. $f \in L_1(\mathbb{R})$ по условию. Значит, по признаку Вейерштрасса сходится и $\hat{f}(y)$. Таким образом, нужно доказать непрерывность $\hat{f}(y)$, т.е., что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall |\Delta y| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(y + \Delta y) - \hat{f}(y)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим искомую разность:

$$|\hat{f}(y + \Delta y) - \hat{f}(y)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}) f(x)\, dx \right|.$$

Оценим ее, как обычно, отдельно исследовав участок $[-A, A]$ и все остальное. В силу сходимости интеграла (1) по фиксированному $\varepsilon > 0$ найдем такое A, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} |f(x)|\, dx + \int\limits_{A}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Заметим также, что

$$|e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}| \leqslant |e^{ix(y+\Delta y)}| + |e^{ixy}| = 2.$$

Объединяя эти два утверждения,

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{-A} (e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}) f(x)\, dx + \int\limits_{A}^{+\infty} (e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}) f(x)\, dx \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Теперь осталось доказать, что

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall |\Delta y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int\limits_{-A}^{A} (e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}) f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу сходимости интеграла (1) $\exists M > 0$ такое, что

$$\left| \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx \right| \leqslant \int\limits_{-A}^{A} |f(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx \leqslant M.$$

Зафиксируем теперь $[c, d] : y, y+\Delta y \in [c, d]$. Поскольку $e^{ixy} \in \mathrm{C}([-A, A] \times [c, d])$, то по теореме Кантора она является и равномерно непрерывной на этом множестве. Тогда по определению равномерной непрерывности

$$\exists \delta(\varepsilon) : \forall |\Delta y| < \delta \Rightarrow |e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{-A}^{A} (e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}) f(x)\, dx \right| \leqslant \int\limits_{-A}^{A} |e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}| \cdot |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь докажем последнюю часть теоремы, а именно, что $\lim\limits_{|y| \to \infty} \hat{f}(y) = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists B(\varepsilon) : \forall |y| \geqslant B \Rightarrow |\hat{f}(y)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и по нему найдем такое A, чтобы выполнялось неравенство (2). Домножим в нем подынтегральные выражения на $|e^{ixy}| = 1$. Неравенство можно ослабить, вынеся модули за знак интеграла:

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{-A} e^{ixy} f(x)\, dx + \int\limits_{A}^{+\infty} e^{ixy} f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь осталось лишь доказать, что

$$\forall y \geqslant B(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int\limits_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\, dx \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Поскольку $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то $f \in \mathfrak{R}[-A, A]$. Тогда из теории Дарбу известно, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется разбиение τ отрезка $[-A, A]$: $-A = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = A$ такое, что

$$0 \leqslant \overline{S_\tau} - \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f_\tau(x) = \begin{cases} M_k, & x \in (x_{k-1}, x_k), \\ 0, & x = x_k, \end{cases}$$

где $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Для этой функции выполняется

$$\int\limits_{-A}^{A} f_\tau(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} M_k\, dx = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S_\tau}. \tag{3}$$

Теперь сделаем хитрый ход:

$$\left| \int\limits_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\, dx \right| = \left| \int\limits_{-A}^{A} e^{ixy} (f(x) - f_\tau(x))\, dx + \int\limits_{-A}^{A} e^{ixy} f_\tau(x)\, dx \right|. \tag{4}$$

Здесь мы прибавили и вычли от подынтегрального выражения $e^{ixy} f_\tau(x)$. Учитывая (3), заметим, что

$$\int\limits_{-A}^{A} (f_\tau(x) - f(x))\, dx = \overline{S_\tau} - \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

А поскольку $f_\tau(x) - f(x) \geqslant 0$ за исключением конечного числа точек x_k (по определению $f_\tau(x)$), то

$$\int\limits_{-A}^{A} |f_\tau(x) - f(x)|\, dx = \int\limits_{-A}^{A} (f_\tau(x) - f(x))\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возвращаясь к интегралу (4), получаем

$$\left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{-A}^{A} \underbrace{|e^{ixy}|}_{=1} \cdot |f(x) - f_\tau(x)|\,dx + \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f_\tau(x)\,dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{k=1}^{n} M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot \left|\frac{e^{ixy}}{iy}\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot 2\frac{1}{|y|} < \frac{2\varepsilon}{3},$$

т.к. $|y| \geqslant B(\varepsilon)$, и поэтому мы можем сделать последнее выражение сколь угодно малым, взяв достаточно большое $B(\varepsilon)$. **[:|||||:]**

Следствие 85.2. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\lambda x) f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda x) f(x)\,dx = 0.$$

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущей теоремы. Достаточно взять $\lambda = |y|$ и вспомнить, что по формуле Эйлера $e^{ix\lambda} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x$. **[:|||||:]**

В литературе преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ иногда также обозначают как $[\hat{f}(x)](y)$, а y называют *мнимой переменной*.

Преобразование Фурье играет важнейшую роль в теории дифференциальных уравнений, как и во многих других разделах математики. Существует его дискретный аналог, так называемое *дискретное преобразование Фурье*, которое также играет ключевую роль в обработке сигналов и используется во многих алгоритмах при обработке изображений, видео, музыки и т.д..

Часть 86
Интеграл Фурье

1 Разложение функции в интеграл Фурье

Будем говорить, что $f(x)$ **разложима в интеграл Фурье** в точке x, если

$$\exists \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \hat{f}(y)\,dy = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi\right)\,dy = \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} \hat{f}(y)\,dy.$$

Забегая чуть вперед, заметим, что интеграл Фурье это не что иное как обратное преобразование Фурье, восстанавливающее функцию f по ее фурье-образу.

Здесь один и тот же предел записан разными способами. Нам периодически будут нужны разные формы записи, но для следующей теоремы выделим следующую:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi\right)\,dy. \tag{1}$$

Теорема 86.1. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Гёльдера в точке x слева с показателем α_1 и справа с показателем α_2 ($\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$), то существует предел (1), который равен $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$.*

Доказательство. С повторным интегралом в пределе (1) неудобно работать, поэтому представим его в виде одинарного интеграла. Докажем, что

$$I_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi\right)dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt.$$

По основной лемме $\hat{f}(y) \overset{[-\lambda,\lambda]}{\rightrightarrows}$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A_0(\varepsilon)>0 : \forall A \geqslant A_0 \Rightarrow \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_{-A}^{A} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{2\lambda}\cdot 2\pi.$$

Теперь рассмотрим следующую разность:

$$\left|I_\lambda(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left(\int\limits_{-A}^{A} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi\right)dy\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_{-A}^{A} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi\right)dy\right| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} |e^{-ixy}|\cdot\frac{\varepsilon}{2\lambda}\cdot 2\pi\,dy = \varepsilon.$$

Таким образом, мы получили

$$\left|I_\lambda(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left(\int\limits_{-A}^{A} e^{i\xi y} f(\xi)\,d\xi\right)dy\right| < \varepsilon.$$

По теореме об интегрировании ИЗП (теорема 66.2) можно поменять пределы интегрирования во втором интеграле, поскольку двойной интеграл, как и оба повторных, существуют. Получаем

$$\left|I_\lambda(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} f(\xi)\,d\xi\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(\xi-x)}\,dy\right| < \varepsilon.$$

По формуле Эйлера

$$I_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,d\xi\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(\xi-x)}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,d\xi\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}(\cos y(\xi-x) + i\sin y(\xi-x))\,dy.$$

Пользуясь симметричностью отрезка интегрирования $[-\lambda,\lambda]$, а также четностью косинуса и нечетностью синуса, получаем

$$I_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot 2\,d\xi\int\limits_{0}^{\lambda}\cos y(\xi-x)\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot\frac{\sin\lambda(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi =$$

$$= \{\xi - x = t\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\cdot\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt.$$

Таким образом, мы упростили $I_\lambda(x)$, как того и хотели. Теперь нужно доказать саму теорему, т.е., что

$$\left|I_\lambda(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| < \varepsilon.$$

Вспомним про интеграл Дирихле:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь, пользуясь им, преобразуем разность:

$$\begin{aligned}
&\left|I_\lambda(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| = \\
&\qquad= \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x-0)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| = \\
&\qquad\qquad= \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}(f(x+t)-f(x-0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}(f(x+t)-f(x+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right|.
\end{aligned}$$

Теперь из условия Гёльдера выберем δ_0, $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $M = \max\{M_1, M_2\}$: $|f(x+t) - f(x\pm 0)| < |t|^\alpha \cdot M$, т.е. чтобы одновременно выполнялось условие слева и справа. Выберем $\delta < \delta_0$. Теперь разобьем последние интегралы на 5 штук:

$$\begin{aligned}
&\left|I_\lambda(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| = \\
&\qquad= \frac{1}{\pi}\left|\underbrace{\int\limits_{-\delta}^{0}(f(x+t)-f(x-0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{0}^{\delta}(f(x+t)-f(x+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt}_{I_2} +\right. \\
&\qquad\left. + \underbrace{\int\limits_{\delta\leqslant|t|<\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt}_{I_3} + \underbrace{f(x-0)\int\limits_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt}_{I_4} + \underbrace{f(x+0)\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt}_{I_5}\right| \leqslant \\
&\qquad\qquad\leqslant \frac{1}{\pi}(|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| + |I_5|).
\end{aligned}$$

Осталось лишь оценить эти 5 интегралов. Начнем с $|I_3| = \left|\int\limits_{\delta\leqslant|t|<\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right|$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)}{t}, & |t| \geqslant \delta, \\ 0, & |t| < \delta. \end{cases}$$

Заметим, что $g \in L_1(\mathbb{R})$, т.к. $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда по следствию 85.2

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\sin\lambda t\,dt = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta\leqslant|t|<\infty} g(t)\sin\lambda t\,dt = 0,$$

т.е. $|I_3| < \frac{\varepsilon}{5}$, т.к. $g(t) = \frac{f(x+t)}{t}$ при $|t| \geqslant \delta$.

Теперь оценим $|I_5|$:

$$|I_5| = \left| f(x+0) \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \right| = \{\lambda t = x\} = \left| f(x+0) \int\limits_{\delta\lambda}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0,$$

т.е. $|I_5| < \frac{\varepsilon}{5}$. Аналогично оценивается и $|I_4|$. Теперь оценим $|I_2|$:

$$|I_2| = \left| \int\limits_0^{\delta} (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \right| \leqslant \int\limits_0^{\delta} |f(x+t) - f(x+0)| \cdot \frac{|\sin\lambda t|}{t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\delta} \frac{M\cdot t^{\alpha}}{t}\,dt = \frac{M\cdot\delta^{\alpha}}{\alpha}.$$

Теперь нужно лишь выбрать δ таким образом, чтобы последнее выражение стало меньше $\frac{\varepsilon}{5}$ (не забывая при этом, что $\delta < \delta_0$). $|I_1|$ оценивается так же. В итоге, получили

$$\left| I_\lambda(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}\right) = \frac{\varepsilon}{\pi} = \varepsilon'.$$

[:|||||:]

2 Прямое и обратное преобразования Фурье

Напомним, что **преобразование Фурье**, называемое еще **прямым преобразованием Фурье**, мы ввели как

$$\boxed{\hat{f}(y) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} f(x)\,dx}.$$

Аналогично вводится и **обратное преобразование Фурье**

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} \hat{f}(y)\,dy},$$

восстанавливающее функцию $f \in L_1(\mathbb{R})$ по ее преобразованию Фурье. Отметим, что в случае, если f — четная, то прямое и обратное преобразования можно переписать в виде

$$\hat{f}(y) = 2\int\limits_0^{+\infty} \cos(yx) f(x)\,dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \cos(yx)\hat{f}(y)\,dy.$$

В этом случае их принято называть **косинус-преобразованиями Фурье**. Аналогично, если f — нечетная, то

$$\hat{f}(y) = 2\int\limits_0^{+\infty} \sin(yx) f(x)\,dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \sin(yx) f(y)\,dy.$$

И тогда они называются **синус-преобразованиями Фурье**.

Часть 87
Кратные ряды Фурье

1 Комплексная форма записи ряда Фурье

Снова вернемся к рядам Фурье. Иногда имеет смысл перейти к комплексной форме их записи. Напомним, что ТРФ задается как

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Преобразуем сумму в скобках, используя формулу Эйлера:

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx},$$

где

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},$$
$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Теперь подставляя коэффициенты ряда Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

получаем

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos kt - i\sin kt) f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} f(t)\,dt.$$

Таким образом, числа c_k вычисляются одинаково $\forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т.е. получаем следующую *комплексную форму ТРФ*:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Фактически это разложение по базису $\{e^{ikx}\}$. Как уже ранее упоминалось, ряды Фурье можно рассматривать не только на отрезке $[-\pi, \pi]$, но и на любом другом симметричном отрезке $[-l, l]$. То же касается и комплексной формы. В этом случае в качестве базиса берется система $\left\{e^{\frac{i\pi kx}{l}}\right\}$. Коэффициент же становится равен

$$c_k = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{-i\pi kt}{l}} f(t)\, dt.$$

И ряд приобретает вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{i\pi kx}{l}}.$$

2 Кратные ряды Фурье

Мы ограничимся случаем двух переменных. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана функция $f(x;y)$. Мы предположим её имеющей период равный 2π как по переменной x, так и по y, и интегрируемой (в собственном или несобственном смысле) в квадрате $\mathbf{Q} = [-\pi;\pi] \times [-\pi;\pi]$.

Рассматривая функцию $f(x;y)$ как функцию от x, получаем:

$$f(x;y) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y) e^{inx}, \text{ где } c_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi;y) e^{-in\xi} d\xi.$$

Функция $c_n(y)$, в свою очередь, может быть разложена в ряд вида:

$$c_n(y) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n,m} e^{imy}, \text{ где}$$

$$c_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} c_n(\eta) e^{-im\eta} d\eta = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi;\eta) e^{-i(n\xi + m\eta)}\, d\xi d\eta.$$

Откуда имеем формулу:

$$f(x;y) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n,m} e^{imy} \right) e^{inx} = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} c_{n,m} e^{i(nx+my)}.$$

В вещественной форме ряд Фурье функции двух переменных выглядит весьма громоздко. Объединяя сопряжённые члены, получим:

$$f(x;y) \sim \sum_{n,m=0}^{+\infty} \lambda_{n,m} \cdot \big(a_{n,m} \cos nx \cos my + b_{n,m} \cos nx \sin my + c_{n,m} \sin nx \cos my + d_{n,m} \sin nx \sin my\big),$$

где

$$\lambda_{n,m} = \begin{cases} 1/4, & \text{если} \quad n = m = 0, \\ 1/2, & \text{если} \quad n = 0, m \neq 0, \text{ или } m = 0, n \neq 0, \\ 1, & \text{если } n \neq 0 \text{ и } m \neq 0. \end{cases}$$

$$a_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbf{Q}} f(\xi;\eta) \cos n\xi \cos m\eta \, d\xi d\eta, \qquad b_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbf{Q}} f(\xi;\eta) \cos n\xi \sin m\eta \, d\xi d\eta,$$

$$c_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbf{Q}} f(\xi;\eta) \sin n\xi \cos m\eta \, d\xi d\eta, \qquad d_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbf{Q}} f(\xi;\eta) \sin n\xi \sin m\eta \, d\xi d\eta.$$

Вопрос о сходимости кратных рядов Фурье решается путём исследования его частичной суммы $S_{n,m}(x;y)$, для которой можно получить интегральное выражение вроде интеграла Дирихле:

$$S_{n,m}(x;y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\mathbf{Q}} f(x+u;y+v) \cdot \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) \cdot \sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)v\right)}{\sin\dfrac{u}{2} \cdot \sin\dfrac{v}{2}} \, dudv.$$

Заметим лишь, что функция $f(x;y)$ заведомо разлагается в точке $(x;y)$ в ряд Фурье, если выполнены условия:

1. Частные производные f'_x и f'_y всюду существуют и ограничены;

2. В окрестности данной точки существует вторая производная f''_{xy} $\big($или $f''_{yx}\big)$, которая в данной точке непрерывна.

Часть 88

Теория Фурье на практике

В данной главе мы рассмотрим взаимосвязь между рядами Фурье и преобразованием Фурье, введем понятие *дискретного преобразования Фурье* и рассмотрим его применение на примере обработки звуковых сигналов, а также в общем изучим физический смысл преобразования Фурье. Также мы затронем быстрое преобразование Фурье.

Сразу отметим, что мы будем использовать следующую формулу для преобразования Фурье:

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi t} f(t) \, dt.$$

Это определение несколько отличается от приведенного ранее. Причина этого будет описана немного позже. Аналогично, обратное преобразование Фурье мы определим как

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\xi t} \hat{f}(\xi) \, d\xi.$$

1 Взаимосвязь рядов Фурье и преобразования Фурье

Рассмотрим для начала простую **финитную** (т.е. ненулевую на каком-то компакте) симметричную относительно 0 функцию. Пусть, например, $f(t) \neq 0$ при $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Пусть также эту функцию можно разложить в ряд Фурье на данном отрезке. Воспользуемся его комплексной формой, которая, напоминаем, записывается как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}, \tag{1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{T}} \, dx.$$

Здесь также используется несколько другая запись как ряда Фурье, так и его коэффициентов. Зададимся теперь вопросом: как будет выглядеть преобразование Фурье подобной описанной выше финитной функции? По определению

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\pi i \xi t} f(t) \, dt.$$

Сравнивая это с формулой для c_n, получаем, что

$$c_n = \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right).$$

Подставляя теперь это в (1), получаем разложение в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{2\pi i \xi_n t} \Delta\xi.$$

Здесь мы просто обозначили $\Delta\xi = \frac{1}{T}$ и $\xi_n = \frac{n}{T}$. Внимательно посмотрим на получившуюся сумму, являющуюся суммой Римана. Если теперь устремить $T \to \infty$, то получаем не что иное как несобственный интеграл

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{2\pi i \xi_n t} \Delta\xi \overset{T\to\infty}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} \, d\xi.$$

А это не что иное, как обратное преобразование Фурье функции $\hat{f}(\xi)$. Таким образом, мы установили взаимосвязь между рядами Фурье и преобразованием Фурье. Эта взаимосвязь имеет далеко идущие последствия и поможет понять физический смысл преобразования Фурье.

Для начала вспомним, в чем смысл разложения в ряд Фурье. Как мы уже знаем, в результате такого разложения мы представляем заданную функцию в виде бесконечной суммы *гармоник*, т.е. синусоид с различной амплитудой, фазой и частотой. Действительно, посмотрим еще раз на разложение:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}.$$

Пусть $c_n = A_n e^{i\varphi_n}$, где $A_n = |c_n|$, а $\varphi_n = \arg(c_n)$. Тогда

$$c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = A_n e^{\frac{2\pi i n t}{T} + i\varphi_n} = A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right) + iA_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right).$$

Отметим, что с этого момента мы будем рассматривать только вещественнозначные функции f. В таком случае мнимая часть суммы равна 0, а значит получаем

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right).$$

Итак, мы получили представление функции f в виде суммы косинусоид (которые также называются *гармониками*), где $|c_n| = A_n$ задает **амплитуду** очередной косинусоиды, $\frac{n}{T}$ — ее **частоту**, а $\arg(c_n) = \varphi_n$ — ее **фазу**. В этом и заключается центральная идея теории Фурье — в представлении функции в виде суммы гармоник.

2 Физический смысл преобразования Фурье

Итак, мы поняли физический смысл разложения в ряд Фурье. Перед этим мы сделали переход от рядов Фурье к преобразованию Фурье. Это позволяет нам вывести следующий **физический смысл преобразования Фурье**. Величина $\hat{f}(\xi)$ от некоторого фиксированного ξ представляет собой комплексное число. **Модуль этого числа численно равен амплитуде косинусоиды частоты ξ, а его аргумент численно равен фазе этой косинусоиды**, входящей в разложение функции $f(t)$.

В чем тут отличие от ряда Фурье? Заметим, что там множество частот *счетно*, теперь же оно представляет собой континуум, соответственно, вместо дискретного набора величин $\{c_n\}$ для каждой из частот мы имеем непрерывную функцию от частоты $\hat{f}(\xi)$.

Смысл обратного преобразования Фурье таким образом состоит в том, чтобы **по заданным значениям амплитуд, фаз и частот** восстановить исходную функцию $f(t)$. В случае рядов Фурье множества амплитуд и фаз, опять-таки счетны, поэтому мы пользуемся обычным суммированием. В случае преобразования Фурье амплитуда и фаза являются непрерывными функциями от частоты, поэтому мы используем «непрерывный аналог» суммирования — интегрирование.

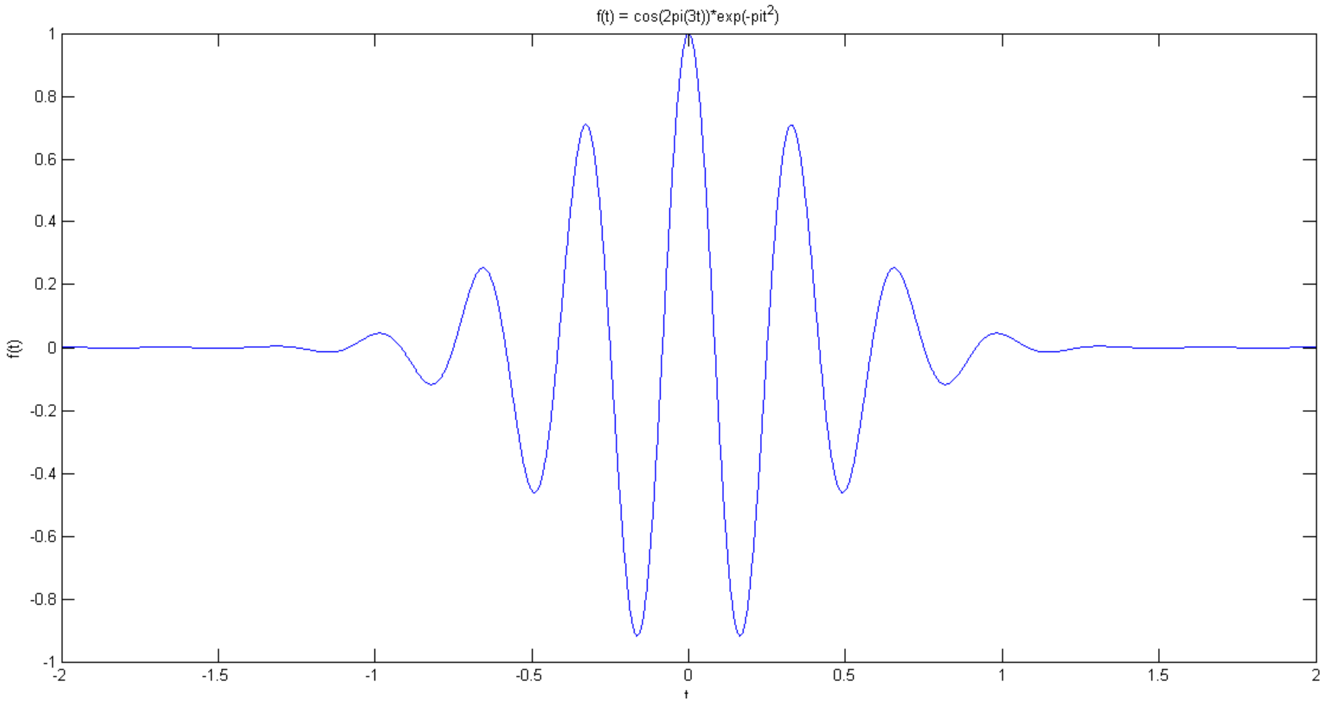
Зачем же использовать преобразование Фурье вместо более простых рядов Фурье? Дело в том, что область применимости рядов весьма ограничена — мы можем раскладывать только периодические функции, причем на отрезке, равном длине периода. Для многих же приложений нужны более широкие рамки применимости, например, возможность раскладывать непериодические или очень протяженные функции. Эту возможность и дает преобразование Фурье.

Рассмотрим подробнее физическую суть данного разложения. Обычно $f(t)$ представляет собой некоторый *сигнал* (пока будем считать его *аналоговым*, т.е. непрерывным). Область значений t зачастую отвечает времени, а сами значения функции f некоторой характеристике сигнала. Например, это может быть амплитуда колебаний для случая звуковых сигналов. Именно поэтому мы ограничились рассмотрением вещественнозначных функций f — обычно редко приходится иметь дело с комплекснозначными сигналами. Опять-таки, в зависимости от физической трактовки аргументов t и ξ может немного меняться вид формул (а именно появляются различные коэффициенты, например $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ перед знаком интеграла). Так, если t считается в секундах, то ξ в приведенных в данной главе формулах будет считаться в герцах. Использованная же в основной части лекций запись преобразования Фурье сформулирована в терминах *циклической частоты*. В разных приложениях удобны разные трактовки.

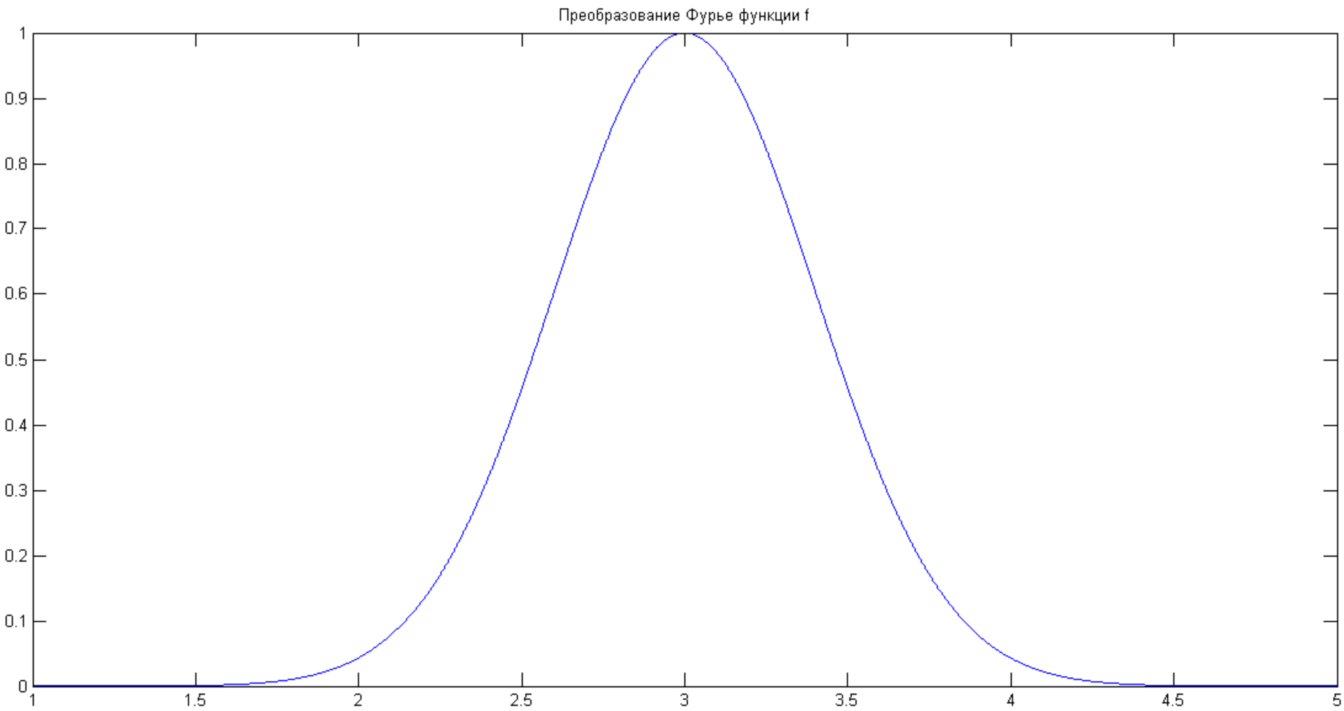
Посмотрим на преобразование Фурье какой-нибудь функции. Например, рассмотрим $f(t) = \cos(2\pi(3t))e^{-\pi t^2}$. Эта функция четная, поэтому ее преобразование Фурье равно

$$\hat{f}(\xi) = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(2\pi(3t))e^{-\pi t^2}\cos(2\pi\xi t)\,dt = e^{-\pi(\xi-3)^2} + e^{-\pi(\xi+3)^2}.$$

График этой функции выглядит следующим образом:



Ее преобразование Фурье же выглядит следующим образом:



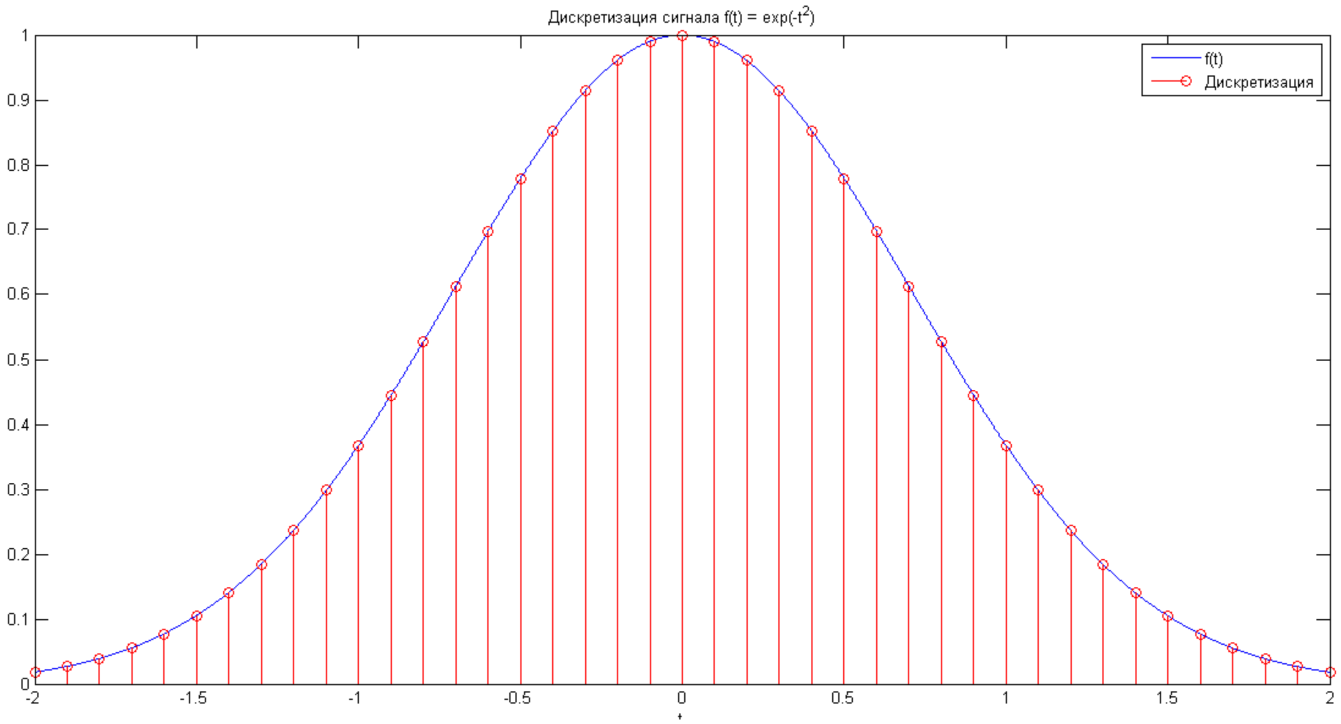
Здесь явно выражено, что исходный сигнал $f(t)$ состоит преимущественно из косинусоид частоты 3 с амплитудой около 1. И действительно, если посмотреть на определение функции $f(t)$, то это есть не что иное, как косинусоида с частотой 3, домноженная на некоторую функцию. Таким образом, преобразование Фурье в явном виде показывает спектр частот исходного сигнала.

Зачем вообще может понадобиться такой переход от представления сигнала в виде функции от времени к разложению на гармоники различных частот? Дело в том, что с таким разложением легче работать. На примере звука, фильтруя определенные частоты, можно отделять голос от музыки, удалять шумы, усиливать определенные частоты (например, добавлять басы) и т.д..

Однако вычислительные устройства не могут работать с *непрерывным* аналоговым сигналом. Перед дальнейшей обработкой необходимо провести *аналого-цифровое преобразование*, чтобы получить *дискретный сигнал*. Соответственно, используемое нами до сей поры непрерывное преобразование Фурье больше не применимо, поэтому необходим другой инструмент.

3 Дискретное преобразование Фурье

Каким образом можно из непрерывной функции получить дискретную? Пусть имеем сигнал $f(t)$ на $[0, T]$. Разделим данный отрезок на $N-1$ часть, в результате чего получим мгновенные значения сигнала в N точках. Этот процесс проиллюстрирован на рисунке ниже. Он называется *дискретизацией* сигнала. Величина $\frac{T}{N}$, соответственно, называется *частотой дискретизации*.



Обозначим полученные точки как $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$. Отметим, что в звуковом формате WAV хранится примерно такая последовательность. В более продвинутых форматах (например, MP3) данная последовательность обычно сжимается, в том числе с использованием дискретного преобразования Фурье.

Итак, у нас есть дискретная последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$. Мы снова хотим перейти от представления в виде сигнала во времени к представлению с помощью частот. Для этого надо данный уже дискретный сигнал разложить на сумму гармоник. Что в данном случае подразумевается под разложением? Поскольку после дискретизации нас уже не интересует часть сигнала между x_i и x_{i+1}, то нам подойдет любое разложение на гармоники, такое, в заданных точках $x_0, \ldots, x_{N-1}$ оно дает в точности исходный дискретный сигнал. Таких разложений, на самом деле, бесконечно много. И одно из таких разложений и находит *дискретное преобразо-*

вание Фурье. Оно задается как

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-2\pi ink}{N}}.$$

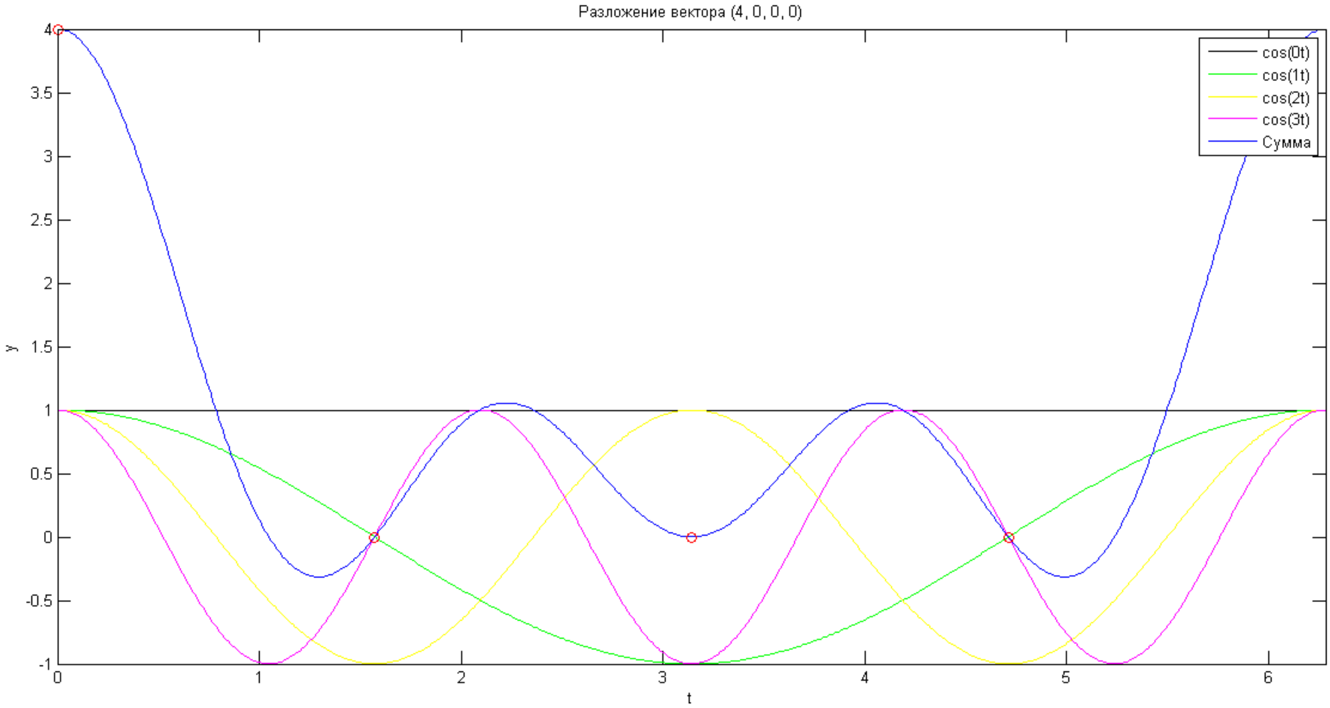
Дискретное обратное преобразование Фурье задается как

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi ink}{N}}.$$

Нетрудно заметить схожесть формул ряда Фурье, непрерывного преобразования Фурье и дискретного преобразования Фурье. Особенность дискретного преобразования в том, что оно возвращает разложение на N гармоник. Где именно «спрятано» это разложение в числах X_k, мы увидим чуть позже. Пока же рассмотрим детальнее простой пример. Рассмотрим дискретный сигнал, определенный при $t \in [0, 2\pi]$. Пусть $N = 4$, а $x_0 = 4$ и $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Как будет выглядеть разложение данного дискретного сигнала? При $t = 0$ все 4 гармоники должны быть амплитуды 1, в остальных же точках гармоники должны взаимно гасить друг друга. Условие при $t = 0$ дает нам, что амплитуды всех косинусоид (напомним, что мы рассматриваем именно косинусоиды, хотя это не имеет большого значения) равны 1, а фазы равны 0. Осталось лишь определиться с частотами. Можно заметить, что для взаимного погашения друг друга нужно взять частоты $0, 1, 2, 3$. Это дает нам следующий набор гармоник:

$$\cos 0t = 1,$$
$$\cos t,$$
$$\cos 2t,$$
$$\cos 3t.$$

И действительно, на графике видно, что эти гармоники дают нужный результат:



Посмотрим теперь на результат дискретного преобразования Фурье сигнала $(4, 0, 0, 0)$. Оно равно $(4, 4, 4, 4)$. Как интерпретировать этот результат? Рассмотрим $X_2 = 4$. В общем случае, это число комплексное. Его можно переписать в экспоненциальном виде

$$X_2 = A_2 e^{i\varphi_2}, \text{ где } A_2 = |X_2|, \; \varphi_2 = \arg(X_2).$$

В данном случае имеем $A_2 = 4$ и $\varphi_2 = 0$. Сформулируем теперь **физический смысл дискретного преобразования Фурье**. Число $X_k = A_k e^{i\varphi_k}$. **Тогда величина $\frac{A_k}{N}$ численно равна амплитуде k-ой гармоники в разложении, φ_k — ее фазе, а ее частота равна $\nu_k = \frac{k}{T}$, где T — суммарное время сигнала. Сама же k-ая гармоника равна $\frac{A_k}{N}\cos(2\pi\nu_k t + \varphi_k)$.** В данном случаем имеем $T = 2\pi$ и

$$\begin{aligned}
&X_0 = 4 \Rightarrow A_0 = 4,\ \varphi_0 = 0,\ \nu_0 = 0 \Rightarrow A_0\cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_0) = \cos 0t,\\
&X_1 = 4 \Rightarrow A_1 = 4,\ \varphi_1 = 0,\ \nu_1 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \cos t,\\
&X_2 = 4 \Rightarrow A_2 = 4,\ \varphi_2 = 0,\ \nu_2 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \cos 2t,\\
&X_3 = 4 \Rightarrow A_3 = 4,\ \varphi_3 = 0,\ \nu_3 = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \cos 3t.
\end{aligned}$$

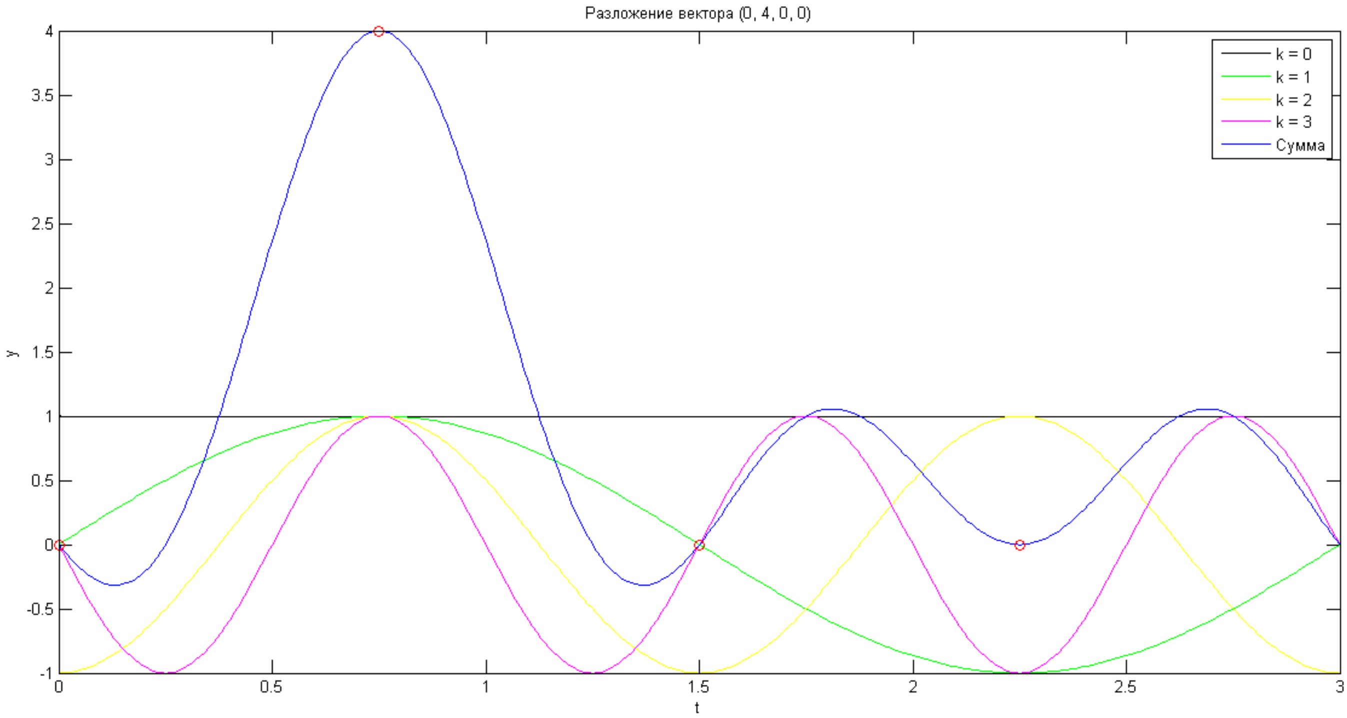
Отметим, что всегда $X_0 = const$. Данное число показывает, насколько в общем сдвинут сигнал относительно оси времени. Рассмотрим другой пример. Пусть $t \in [0, 3]$, а нужно разложить $(0, 4, 0, 0)$. Получаем следующее ДПФ:

$$(4, -4i, -4, 4i).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&X_0 = 4 \Rightarrow A_0 = 4,\ \varphi_0 = 0,\ \nu_0 = 0 \Rightarrow \cos 0t = 1,\\
&X_1 = -4i \Rightarrow A_1 = 4,\ \varphi_1 = \frac{3\pi}{2},\ \nu_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{3\pi}{2}\right),\\
&X_2 = -4 \Rightarrow A_2 = 4,\ \varphi_2 = \pi,\ \nu_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{4\pi t}{3} + \pi\right),\\
&X_3 = 4i \Rightarrow A_3 = 4,\ \varphi_3 = \frac{\pi}{2},\ \nu_3 = 1 \Rightarrow \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

И действительно, суммируя, получаем



В чем смысл обратного дискретного преобразования Фурье? Как и для непрерывного обратного преобразования в том, чтобы перейти к изначальному сигналу от частотного представления. Например, для вектора $(4, -4i, -4, 4i)$ обратное преобразование Фурье в точности равно $(0, 4, 0, 0)$.

Отметим, что до этого мы брали дискретное преобразование Фурье только от сигнала вида $(0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$. Тогда для того, чтобы взять ДПФ от сигнала $(x_0, x_1, \ldots, X_{N-1})$, нужно взять ДПФ от каждой из компонент $(x_0, 0, \ldots, 0), (0, x_1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, x_{N-1})$, а затем, пользуясь линейностью преобразования Фурье (а все свойства непрерывного преобразования справедливы и для дискретного, правда некоторые немного в другой формулировке, о чем будет сказано в дальнейшем), сложить все вместе. Само ДПФ, разумеется, работает не так, но такой процесс служит наглядной демонстрацией того, что любой сигнал можно разложить в сумму гармоник.

4 Быстрое преобразование Фурье

На практике, однако, непосредственно вычислять дискретные прямое и обратное преобразования по приведенным формулам крайне не эффективно, поэтому существуют различные алгоритмы для вычисления ДПФ и обратного ДПФ. Под *быстрым преобразованием Фурье* подразумевается целое семейство алгоритмов, но чаще всего под этим понимается алгоритм Кули-Тьюки, который позволяет вычислить ДПФ для дискретного сигнала из $N = 2^k$ элементов.

Здесь не будет приводиться данный алгоритм, поскольку он рассматривается во многих учебниках по алгоритмам. Приведем лишь его идею, которая дает еще одну интерпретацию смысла ДПФ. Взглянем на немного другую формулу ДПФ:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}}.$$

Перепишем ее в виде

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left(e^{\frac{2\pi i k}{N}}\right)^n = \sum_{n=0}^{N-1} x_n (w_N^k)^n.$$

Что такое w_N^k? Это не что иное, как k-ый по счету корень N-ой степени из -1. Теперь если внимательно посмотреть на получившуюся сумму, станет понятна другая интерпретация ДПФ. X_k **есть значение полинома** $P(x) = x_0 + x_1 x + x_2 x^2 + \cdots + x_{N-1} x^{N-1}$**, вычисленное в точке** w_N^k. В этом и заключается основная идея алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Выбор таких «странных» точек для вычисления значений полинома не случаен. Дело в том, что корни N-ой степени из -1 образуют циклическую группу относительно операции умножения. Именно это и позволяет составить эффективный алгоритм для вычисления ДПФ.

Наконец, рассмотрим еще одно применение быстрого преобразования Фурье. Вспомним, что непрерывное преобразование Фурье обладает следующим свойством:

$$F[f_1(x) * f_2(x)](\xi) = \hat{f}_1(\xi) \cdot \hat{f}_2(\xi),$$

где

$$f_1(x) * f_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(x-y)\, dy \text{ — свертка функций.}$$

Помимо этого мы также знаем, что

$$F^{-1}[F[f(x)](\xi)](x) = f(x).$$

Посмотрим теперь на те же свойства для дискретного преобразования Фурье (обозначим его как DFT). Во-первых, справедливо то же свойство со сверткой (но теперь свертка уже берется для последовательности):

$$\mathrm{DFT}[x^1 * x^2] = \mathrm{DFT}[x^1] \cdot \mathrm{DFT}[x^2], \tag{2}$$

где свертка последовательностей определяется как

$$(x^1 * x^2)_k = \sum_{n=0}^{k} x_n^1 \cdot x_{k-n}^2, \tag{3}$$

а под умножением в правой части (2) подразумевается поточечное умножение.

Второе свойство аналогично:

$$\mathrm{DFT}^{-1}[\mathrm{DFT}[x]] = x.$$

Здесь под x, x^1, x^2 уже имеются ввиду дискретные сигналы, т.е. последовательности чисел. Это два важнейших свойства дискретного преобразования Фурье, обуславливающие его широкое применение в обработке сигналов. Действительно, посмотрим на (3). Непосредственное вычисление свертки двух последовательностей требует $\underline{\mathrm{O}}(N^2)$ времени. Однако, запишем ту же свертку с помощью преобразования Фурье:

$$x^1 * x^2 = \mathrm{DFT}^{-1}[\mathrm{DFT}[x^1] \cdot \mathrm{DFT}[x^2]].$$

Поточечное умножение занимает $\underline{\mathrm{O}}(N)$ времени, поэтому вопрос только в том, как быстро мы можем вычислить прямое и обратное ДПФ. Быстрое преобразование Фурье позволяет сделать это за $\underline{\mathrm{O}}(N \log N)$. Таким образом, мы получили эффективный алгоритм вычисления сверток двух последовательностей.

Пусть теперь $\bar{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$ и $\bar{q} = (q_0, \ldots, q_{N-1})$ представляют собой коэффициенты многочленов

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{N-1} x^{N-1},$$
$$Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_{N-1} x^{N-1}.$$

Мы хотим вычислить $P(x)Q(x)$. Заметим, что непосредственное вычисление произведения многочленов занимает $\underline{\mathrm{O}}(N^2)$ времени. Поступим по-другому. Дополним оба набора $\bar{p}$ и $\bar{q}$ нулями до длины $2N$. Тогда коэффициенты многочлена $P(x)Q(x)$ задаются сверткой $\bar{p} * \bar{q}$. Действительно, k-ый коэффициент произведения многочленов равен

$$(P(x)Q(x))_k = \sum_{n=0}^{k} p_n \cdot q_{k-n},$$

что в точности равно k-ому элементу свертки $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Зачем нужно дополнение нулями? Дело в том, что степень произведения многочленов степени N будет равна $2N$. Дополнение нулями нужно, чтобы учесть в свертке коэффициенты $k \geqslant N$.

А поскольку мы уже умеем эффективно вычислять свертку последовательностей, то и произведение многочленов мы также можем эффективно вычислить. Иногда это считается основным применением быстрого преобразования Фурье, что разумеется не так. Отметим также, что при работе с реальным сигналом дополнение его нулями для вычисления БПФ обычно недопустимо, поскольку это приводит к разного рода артефактам на высоких частотах. Вместо этого используются другие методы.

Быстрое преобразование Фурье является одним из важнейших методов в цифровой обработке сигналов.

Часть 89
Явление Гиббса

В этой главе мы рассмотрим пример, когда ряд Фурье не всегда представляет разлагаемую функцию с должной точностью. А именно, изучим так называемое *явление Гиббса* — когда ряд Фурье разрывной функции не сходится к разлагаемой функции в окрестности разрыва.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1, & -x \leqslant t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \leqslant x. \end{cases}$$

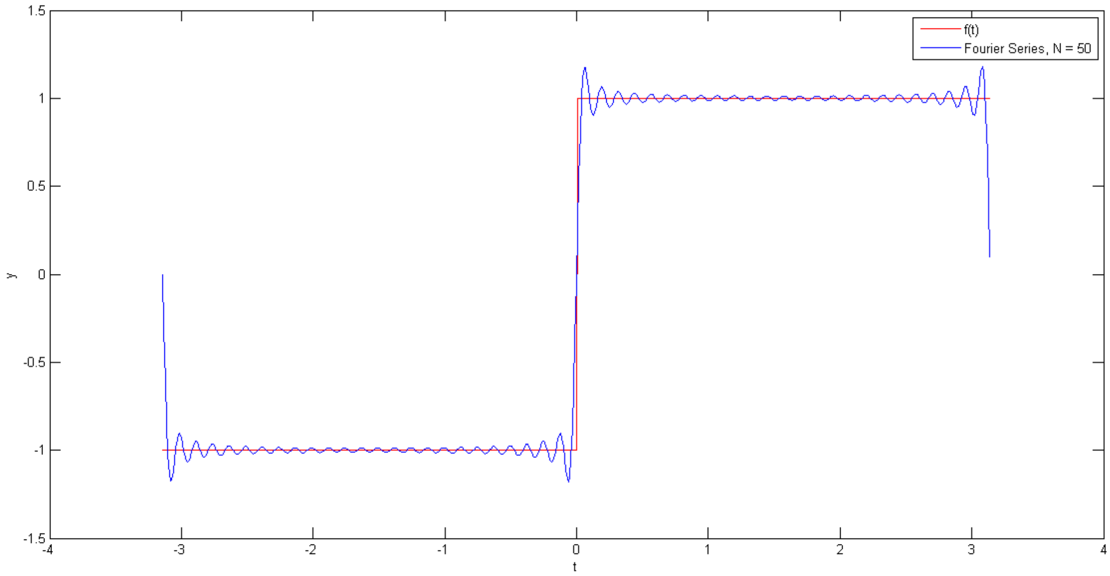
Продолжим ее периодически, например, рассмотрев функцию $f(t) = \operatorname{sgn}(\sin t)$. Исследуем ее на отрезке $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. Поскольку данная функция является нечетной, ее ряд Фурье содержит только синусы в разложении, т.е. $\forall a_k = 0$. Тогда

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin kt\,dt = \frac{2}{\pi k}(1-(-1)^k) = \begin{cases} \frac{4}{\pi k}, & k = 2n-1, \\ 0, & k = 2n. \end{cases}$$

Разлагая теперь в ряд Фурье,

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt = \lim_{N\to\infty} S_N(t) = \frac{4}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}.$$

Ниже приведен график функции и частичной суммы ее ряда Фурье при $N = 50$. Около разрыва в $t = 0$ как раз наблюдается описанный эффект.



Исследуем, как ведут себя экстремумы $S_N(t)$ (в которых $S_N(t)$ наиболее отклоняется от разлагаемой функции) при $N \to \infty$. Для этого сначала найдем производную, пользуясь формулой

Эйлера и формулой суммы геометрической прогрессии (с начальным членом e^{it} и знаменателем e^{2it}):

$$\frac{dS_N(t)}{dt} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(2n-1)t = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N}e^{i(2n-1)t} = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(e^{it}\frac{e^{i2Nt}-1}{e^{2it}-1}\right) = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(e^{iNt}\frac{e^{iNt}-e^{-iNt}}{e^{it}-e^{-it}}\right).$$

Здесь мы пользовались тем, что $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \operatorname{Re}(e^{i\alpha})$ и $\sin\alpha = \operatorname{Im}(e^{i\alpha})$. Заметим теперь, что в последней скобке имеем частное синусов, т.к. $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$. Получаем

$$\frac{dS_N(t)}{dt} = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(e^{iNt}\frac{\sin Nt}{\sin t}\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos Nt\sin Nt}{\sin t} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin 2Nt}{\sin t}.$$

Следовательно, все точки экстремумов удовлетворяют условию $\sin 2Nt = 0$ (кроме $t = 0$). При $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ (картины при $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$, как и при $-\pi \leqslant t \leqslant 0$ абсолютно симметричны) получаем

$$t_n = \frac{\pi}{2N}n,\ n = 1, 2, \ldots, N.$$

Теперь, интегрируя $\frac{dS_N(t_n)}{dt}$, получим выражение для $S_N(t_n)$ в интегральной форме:

$$S_N(t_n) = \int\limits_0^{t_n}\frac{dS_N(t)}{dt}\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{t_n}\frac{\sin 2Nt}{\sin t}\,dt = \left\{\begin{aligned} 2Nt &= \tau \\ dt &= \frac{d\tau}{2N}\end{aligned}\right\} = \frac{1}{\pi N}\int\limits_0^{\pi n}\frac{\sin\tau}{\sin\frac{\tau}{2N}}\,d\tau.$$

Раскладывая подынтегральную функцию в ряд Тейлора при $N \to \infty$, получаем

$$\frac{\sin\tau}{\pi N\sin\frac{\tau}{2N}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\tau}{\tau} + \frac{\tau\sin\tau}{12\pi N^2} + \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{N^4}\right),\ N \to \infty.$$

Возвращаясь к интегралу:

$$\frac{1}{\pi N}\int\limits_0^{\pi n}\ldots d\tau = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi n}\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau + \frac{1}{12\pi N^2}\int\limits_0^{\pi n}\tau\sin\tau\,d\tau + \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{n}{N^4}\right) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Si}(\pi n) - \frac{(-1)^n n}{12N^2} + \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{n}{N^4}\right),$$

где $\operatorname{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ — интегральный синус. Разложим его в ряд Тейлора при $x \to \infty$ с помощью интегрирования по частям:

$$\operatorname{Si}(x) = \int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt - \int\limits_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \int\limits_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int\limits_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^3} + \underline{\mathrm{O}}(x^{-5}).$$

Рассмотрим теперь как ведут себя найденные экстремумы t_n при $N \to \infty$. Если номер экстремума — целое число $n = \alpha N$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, то $t_n = \frac{1}{2}\pi\alpha$, и

$$S_N(t_n) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Si}(\pi\alpha N) + \underline{\mathrm{O}}(N^{-1}) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{2}{\pi}\lim_{x\to\infty}\operatorname{Si}(x) = 1.$$

Иными словами, вне разрыва функции ее ряд Фурье сходится к ней. Если же номер экстремума не зависит от N, то тогда положение всех таких экстремумов при $N \to \infty$ сливается с точкой разрыва $t = 0$, а величина наибольшего из этих экстремумов, учитывая найденное выражение для $S_N(t)$, достигается при $n = 1$ и равна

$$\max\left\{\lim_{N\to\infty} S_N(t)\right\} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) \approx 1.179.$$

Таким образом, сумма бесконечного ряда Фурье функции $f(\operatorname{sgn} t)$, проходя через точки разрыва, делает скачки, примерно на 17.9% большие, чем скачки разлагаемой функции.

Часть 90

Численные методы

Эта глава стоит особняком от всего остального, т.к. мы рассмотрим некоторые практические приложения математического анализа, а именно численные методы, но не претендуя при этом на строгость изложения.

1 Метод бисекции

Начнем с самого простого метода. Пусть есть функция $f(x)\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, причем $f(x) \in \mathrm{C}[a,b]$. Предположим, что $f(a) \leqslant 0,\ f(b) \geqslant 0$ (или наоборот). Данный метод позволяет найти какое-либо ***одно*** решение уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$. ***Не стоит путать этот метод с двоичным поиском!*** Двоичный поиск требует *монотонности* функции на отрезке $[a,b]$ и используется, в основном, при поиске нулей у функций $g(x)\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, т.е. не обладающих непрерывностью.

Теперь подробнее о методе. Для начала заметим, что теорема 13.4 гарантирует существование хотя бы одного решения. Найдем его следующим образом:

1. Проверим сначала, что $f(a) = 0$ или $f(b) = 0$. Если хотя бы одно из условий истинно, то искомый корень, очевидно, найден.
2. Примем $c = \frac{a+b}{2}$. Теперь возможно 3 варианта:
   - $f(c) = 0$. В этом случае точка c — искомый корень.
   - $f(c) > 0$. Тогда если $f(a) < 0$, то поставим $b = c$, иначе $a = c$.
   - $f(c) < 0$. Тогда если $f(a) < 0$, то поставим $a = c$, иначе $b = c$.
3. Перейдем к шагу 2.

Проанализируем данный метод. Суть условий в пункте 2 заключается в том, чтобы сохранить инвариант $f(a) \leqslant 0,\ f(b) \geqslant 0$ (или наоборот). Как несложно убедиться, данный инвариант действительно сохраняется. После каждой итерации алгоритма новые вычисленные значения a и b находятся уже ближе к искомому корню. Заметим, что данный метод может никогда не сойтись. Например, если рассмотреть $f(x) = \sqrt{2} - x$ на отрезке $[0,2]$. В этом случае каждое a_n и b_n является рациональным, в то время как искомое решение иррационально. Последовательность получаемых приближений составляет систему стягивающихся сегментов, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}.$$

Однако численные методы призваны находить приближенные решения. Здесь решение очевидно, но, как мы увидим позднее, честное решение некоторых уравнений (или нахождение каких-либо других величин) крайне трудоемко. Чтобы искать приближенное решение, в нашем случае можно прибегнуть к использованию удовлетворяющей нас *абсолютной погрешности* ε. Иными словами, мы хотим найти такое c, что $|f(c)| < \varepsilon$. Соответственно, именно таким образом и следует производить проверку «равенства» $f(c) = 0$.

В таком варианте метод всегда будет сходиться, т.к. используемое ε конечно, а значит найдется такое n, что $|f(a_n)| < \varepsilon$ и $|f(b_n)| < \varepsilon$. Например, пусть необходимо вычислить $\sqrt[3]{2015}$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Это можно представить как нахождения нуля функции $f(x) = 2015 - x^3$. Применяя метод бисекции на отрезке $[0,100]$, получаем следующий результат:

```
a = 0.0000000, b = 100.0000000, c = 50.0000000, f(c) = -122985.0000000
a = 0.0000000, b = 50.0000000, c = 25.0000000, f(c) = -13610.0000000
a = 0.0000000, b = 25.0000000, c = 12.5000000, f(c) = 61.8750000
a = 12.5000000, b = 25.0000000, c = 18.7500000, f(c) = -4576.7968750
a = 12.5000000, b = 18.7500000, c = 15.6250000, f(c) = -1799.6972656
a = 12.5000000, b = 15.6250000, c = 14.0625000, f(c) = -765.9143066
a = 12.5000000, b = 14.0625000, c = 13.2812500, f(c) = -327.7009583
a = 12.5000000, b = 13.2812500, c = 12.8906250, f(c) = -127.0121193
a = 12.5000000, b = 12.8906250, c = 12.6953125, f(c) = -31.1156964
a = 12.5000000, b = 12.6953125, c = 12.5976562, f(c) = 15.7400736
a = 12.5976562, b = 12.6953125, c = 12.6464844, f(c) = -7.5973567
a = 12.5976562, b = 12.6464844, c = 12.6220703, f(c) = 4.0939285
a = 12.6220703, b = 12.6464844, c = 12.6342773, f(c) = -1.7460661
a = 12.6220703, b = 12.6342773, c = 12.6281738, f(c) = 1.1753425
a = 12.6281738, b = 12.6342773, c = 12.6312256, f(c) = -0.2850089
a = 12.6281738, b = 12.6312256, c = 12.6296997, f(c) = 0.4452550
a = 12.6296997, b = 12.6312256, c = 12.6304626, f(c) = 0.0801451
a = 12.6304626, b = 12.6312256, c = 12.6308441, f(c) = -0.1024264
a = 12.6304626, b = 12.6308441, c = 12.6306534, f(c) = -0.0111393
a = 12.6304626, b = 12.6306534, c = 12.6305580, f(c) = 0.0345033
a = 12.6305580, b = 12.6306534, c = 12.6306057, f(c) = 0.0116821
a = 12.6306057, b = 12.6306534, c = 12.6306295, f(c) = 0.0002714
a = 12.6306295, b = 12.6306534, c = 12.6306415, f(c) = -0.0054339
a = 12.6306295, b = 12.6306415, c = 12.6306355, f(c) = -0.0025813
a = 12.6306295, b = 12.6306355, c = 12.6306325, f(c) = -0.0011549
a = 12.6306295, b = 12.6306325, c = 12.6306310, f(c) = -0.0004417
a = 12.6306295, b = 12.6306310, c = 12.6306303, f(c) = -0.0000852
a = 12.6306295, b = 12.6306303, c = 12.6306299, f(c) = 0.0000931
a = 12.6306299, b = 12.6306303, c = 12.6306301, f(c) = 0.0000040

c = 12.6306301
```

Можно убедиться, что значение c получено верно. Оценим скорость сходимости данного метода. На каждом шаге отрезок $[a, b]$ уменьшается вдвое. Пусть c_i — середина отрезка $[a_i, b_i]$, полученная на i-ом шаге, а x — искомое решение. Тогда на n-ом шаге, очевидно, выполняется:

$$|c_n - x| \leqslant \frac{b-a}{2^n}.$$

Из этого неравенства можно найти необходимое количество шагов n для достижения требуемой погрешности ε: $n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) \right\rceil$. Таким образом, метод сходится относительно быстро (хотя и не очень) и позволяет найти корень с любой наперед заданной точностью. Он нам пригодится в дальнейшем.

2 Нахождение всех вещественных корней полинома

Предположим, что имеется многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ над полем $\mathbb{R}$, и необходимо найти все такие вещественные x, что $P_n(x) = 0$. По теореме Абеля-Руффини данная задача неразрешима в радикалах при $n > 4$. Однако искать корни многочленов приходится во многих областях, поэтому существует великое множество предназначенных для этого численных методов. Мы изучим не самый эффективный, но наиболее простой метод решения этой задачи. Как и раньше, мы предполагаем, что задано некоторое ε и мы хотим найти такие $x : |P_n(x)| < \varepsilon$.

Предположим, что есть некоторые 2 точки a и b, причем полином имеет разные знаки в этих точках. Тогда мы можем воспользоваться уже описанным методом бисекции, чтобы найти какой-либо корень. Однако нам необходимо найти все корни. Заметим, что если функция $P_n(x)$ строго монотонна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует единственный корень. Действительно, если предположить, что существуют две такие точки $x_1 < x_2 : P_n(x_1) = P_n(x_2) = 0$, то в силу монотонности $\forall c \in (x_1, x_2) \Rightarrow 0 < P_n(c) < 0$, что невозможно. В данном случае мы можем с полной уверенностью требовать именно ***строгую*** монотонность, т.к. если предположить, что имеется отрезок $[a', b']$, такой, что полином равен некоторому c во всех точках этого отрезка, то выходит, что у полинома $P_n(x) - c$ корней бесконечно много, что противоречит основной теореме алгебры.

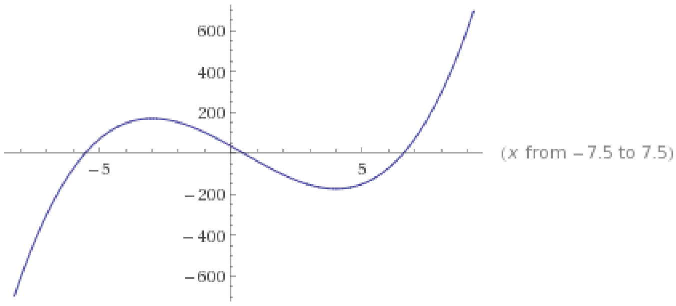
Для того, чтобы на отрезке $[a, b]$ функция была бы монотонна, очевидно, необходимо и достаточно того, чтобы a и b были экстремумами, причем $\nexists c : a < c < b$ и c — экстремум. Значит, мы свели исходную задачу к нахождению всех экстремумов $P_n(x)$. По теореме Ферма, если x_0 — экстремум функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$, причем обратное, вообще говоря, неверно. В нашем случае этому свойству будут также удовлетворять все точки перегиба.

Предположим, что мы нашли все такие x_i (в количестве k штук), что $P_n'(x_i) = 0$. Расположим их так, что $\forall i = \overline{1, k-1} \Rightarrow x_i < x_{i+1}$. Заметим, что точки перегиба не меняют характера монотонности. Иными словами если есть экстремумы a и b и точка перегиба c между ними, то мы ничего не потеряем, если применим бисекцию на отрезке $[a, c]$, а затем на $[c, b]$, т.к. если функция монотонна на $[a, b]$, то она монотонна и на $[a, c]$, и на $[c, b]$. Таким образом, чтобы найти все корни, нужно просто применить метод бисекции на тех интервалах $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots,$ $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_k, +\infty)$, где полином имеет разные знаки в границах. Некоторую сложность может представлять нахождение «конкретных» значений $\pm\infty$, но обычно корни ищутся на некотором отрезке $[a, b]$. Если же это не так, то соответствующие границы определяются вручную (чаще всего полиномы растут достаточно быстро, поэтому с этим проблем нет). Существуют и конструктивные методы определения границ корней, которые читатель может найти самостоятельно.

Соответственно, осталось лишь научиться находить все такие x_i. Как ни странно, это делается очень просто. Заметим, что $P_n'(x)$ — многочлен уже $(n-1)$-ой степени. Нам необходимо найти все его нули. Таким образом, получили простую рекурсию:

- Пусть функция $f(P_n)$ возвращает список всех нулей полинома P_n.
- База: $n = 1$. В этом случае мы либо тривиально находим единственный корень и возвращаем его, либо возвращаем пустой список.
- В противном случае продифференцируем $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$. Пусть теперь список $\widehat{x} = f(P_{n-1})$ длины k.
- Применим метод бисекции с нашим ε последовательно ко всем интервалам $(-\infty, \widehat{x}_1]$, $[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2], \ldots,$ $[\widehat{x}_k, +\infty)$. Пусть найденные решения $x_1, \ldots, x_{k'}$ (в порядке обработки интервалов). Вернем в качестве результата список $(x_1, \ldots, x_{k'})$.

Например, возьмем многочлен $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 35$. После взятия производной получаем $P_2(x) = 6x^2 - 6x - 72$. Корнями данного многочлена являются $x_1 = -3, x_2 = 4$. Достаточно применить 3 раза метод бисекции, чтобы найти все 3 корня.



Теперь оценим время работы данного метода. Очевидно, что время работы каждого вызова метода бисекции можно оценить сверху как $\underline{\mathrm{O}}\left(n\left\lceil\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right\rceil\right)$, т.к. для вычисления значения полинома в точке x требуется $\underline{\mathrm{O}}(n)$ операций (по схеме Горнера).

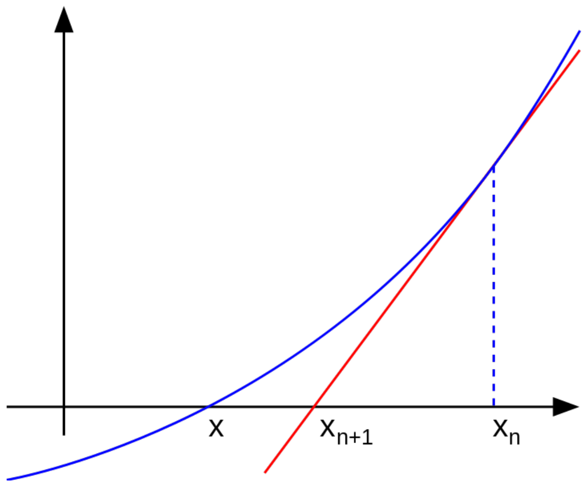
Тогда если $T(n)$ — время работы функции для полинома P_n, то

$$T(n) = T(n-1) + n\cdot\underline{\mathrm{O}}\left(n\left\lceil\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right\rceil\right),$$
$$T(n) = \underline{\mathrm{O}}\left(n^3\left\lceil\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right\rceil\right).$$

3 Метод Ньютона

На практике описанный выше метод бисекции применяется достаточно редко ввиду его малой скорости сходимости. Если необходимо вычислить значение какой-либо элементарной функции, вроде корня, многие математические пакеты, библиотеки языков программирования или калькуляторы обычно используют либо разложение в ряд Тейлора с последующим взятием первых нескольких членов, либо производят вычисление по методу Ньютона. Несмотря на свой почтенный возраст (что можно понять по названию), метод касательных (второе название) до сих пор используется там, где необходима высокая скорость вычислений (или их тривиальность). Яркий пример: алгоритм быстрого вычисления обратного квадратного корня $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Впрочем, применять метод Ньютона нужно с большой осторожностью, подробнее о чем будет сказано ниже.

Пусть есть функция $f(x)\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, дифференцируемая на отрезке $[a,b]$, и нужно найти произвольное решение уравнения $f(x) = 0$. Сначала дадим геометрическое описание метода. На рисунке справа приведен пример функции (выделена синим), нуль которой нужно найти. Пусть x_n — некоторая точка, в которой значение функции отлично от нуля. Проведем касательную в этой точке и найдем ее пересечение с осью Ox. Обозначим его как x_{n+1}. Как видим, новая вычисленная точка лежит ближе к искомому корню. Как мы уже знаем,



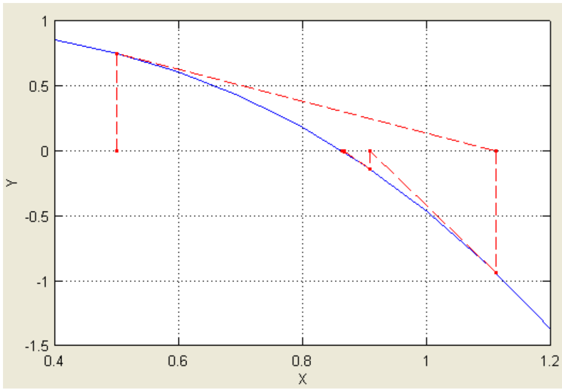
$$f'(x_n) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = \frac{-f(x_n)}{x_{n+1} - x_n},$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Последняя формула и задает последовательность, по которой мы вычисляем приближения. Таким образом, метод Ньютона заключается в задании начального приближения x_0 и последовательном вычислении x_n до тех пор, пока не станет верным неравенство $|f(x_n)| < \varepsilon$ (или

$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, что лучше, т.к. решения может и не быть). Например, найдем решение уравнения $\cos x = x^3$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-12}$. Необходимо найти нуль функции $f(x) = \cos x - x^3$. Найдем производную $f'(x) = -\sin x - 3x^2$. В качестве начального приближения возьмем $x_0 = 0.5$, т.к. искомый корень, очевидно, не превосходит 1. Получим следующую последовательность приближений:

$x_0 = 0.500000000000$
$x_1 = 1.112141637097$
$x_2 = 0.909672693737$
$x_3 = 0.867263818209$
$x_4 = 0.865477135298$
$x_5 = 0.865474033111$
$x_6 = 0.865474033102$

Итоговый результат получен достаточно быстро. Число точных разрядов примерно удваивается с каждым шагом, поэтому метод обладает *квадратичной сходимостью*. На рисунке справа приведено построение нескольких первых приближений.



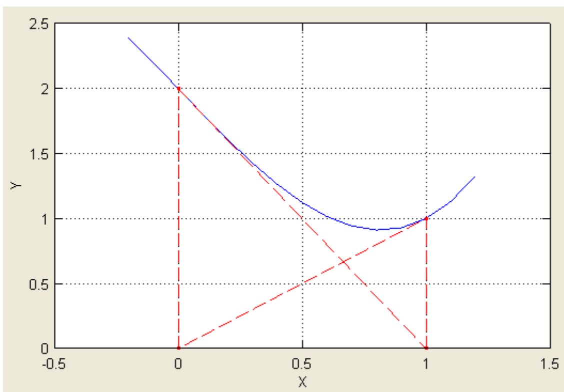
Теперь рассмотрим уже знакомый пример вычисления $\sqrt[3]{2015}$ с точностью 10^{-6}. Снова представим это как нахождение нуля функции $f(x) = 2015 - x^3$. В качестве начального приближения возьмем, например, точку $x_0 = 50$. По формуле получаем

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2015 - x_n^3}{3x_n^2}.$$

Тогда имеем следующие приближения:

$x_0 = 50.0000000$
$x_1 = 33.6020000$
$x_2 = 22.9962054$
$x_3 = 16.6009139$
$x_4 = 13.5044682$
$x_5 = 12.6859542$
$x_6 = 12.6308710$
$x_7 = 12.6306301$

Итоговое решение найдено почти в 3 раза быстрее, чем при использовании метода бисекции, при том, что поиск проводился при меньшей погрешности! Однако продемонстрируем теперь пример, в котором возможно столкнуться с проблемой при применении метода Ньютона. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Теперь возьмем в качестве начального приближения $x_0 = 0$. Следующая вычисленная точка будет равна $x_1 = 1$, после чего $x_2 = 0$. Таким образом метод никогда не сойдется, хотя решение и существует.



Однако если выбрать $x_0 = -1$, то метод быстро сойдется. Чтобы облегчить выбор начального приближения, сформулируем следующую теорему.

Теорема 90.1 (***Достаточное условие сходимости метода Ньютона***)**.** *Если $f(a) \cdot f(b) < 0$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от 0 и сохраняют определенные знаки при $a \leqslant x \leqslant b$, то исходя из начального приближения x_0, удовлетворяющего неравенству $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, можно вычислить единственный корень ξ уравнения $f(x) = 0$ с любой степенью точности.*

Заметим, что ***данное условие не является необходимым***. Однако в данном случае мы не сможем выбрать такие a и b, чтобы условие выполнялось при $x_0 = 0$. Заметим, что если выбрать $a = -5,\ b = -1,\ x_0 = -1$, то условие выполняется и метод действительно сходится.

Таким образом, не стоит применять его бездумно. Но при должном анализе метод Ньютона сослужит хорошую службу.

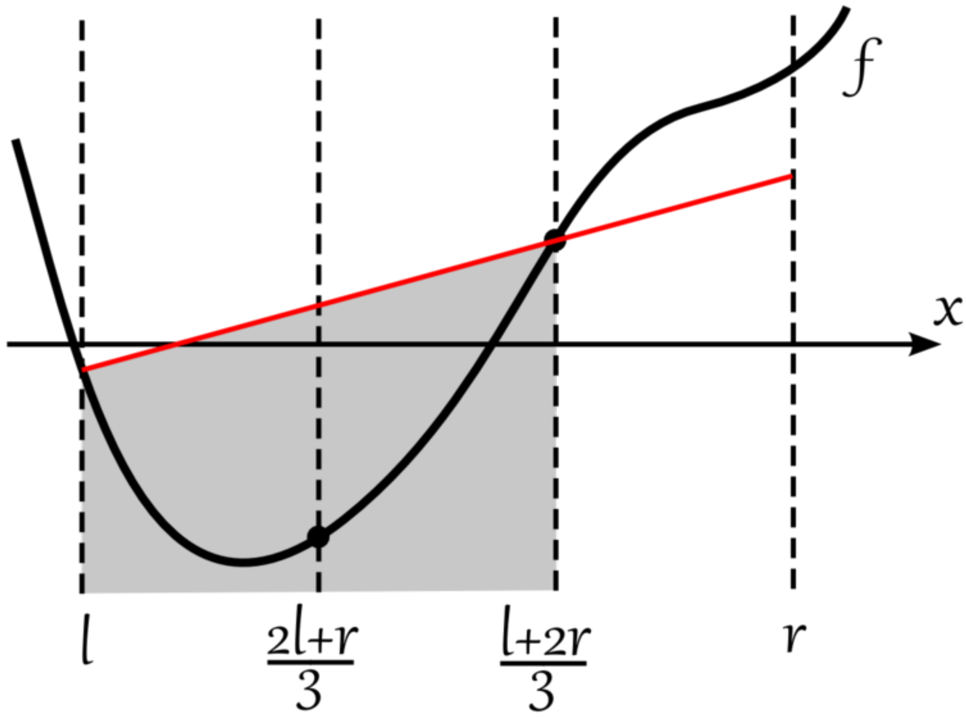
4 Метод золотого сечения

Сейчас мы рассмотрим метод (а также его небольшую модификацию), который позволяет искать минимум (максимум) некоторой непрерывной ***унимодальной функции***. Функция $f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[l, r]$, если $\exists m,\ l \leqslant m \leqslant r : \forall x \in [l, m) \Rightarrow f(x) \nearrow \ (f(x) \searrow)$ и $\forall x \in (m, r] \Rightarrow f(x) \searrow \ (f(x) \nearrow)$. Иными словами, функция унимодальна, если $\exists m \in [l, r]$, такое, что при $x < m$ функция не убывает (не возрастает), а при $x > m$ функция не возрастает (не убывает). Несмотря на то, что унимодальные функции встречаются не так часто, а исследование на унимодальность зачастую нетривиально, этот метод может быть полезен. Например, если мы можем разбить исходную область поиска функции X на отрезки, на которых они унимодальна, то для нахождения глобального минимума достаточно выбрать минимум из найденных значений на каждом отрезке.

Для начала рассмотрим более простой ***тернарный поиск***. Будем считать, что функция $f(x)\colon [l, r] \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[l, r]$ и унимодальна на нем, причем $\exists! m : \forall x \in [l, r],\ x \neq m \Rightarrow f(x) > f(m)$ (насчет строгости данного неравенства будет сказано ниже). Как и раньше, мы хотим найти минимум с некоторой точностью ε. Метод очень похож на метод бисекции: мы также сужаем границы поиска до тех пор, пока не найдем с нужной погрешностью искомую точку.

1. Если выполняется $r - l < \varepsilon$, то искомый минимум найден (в качестве его можно взять, например, точку $m' = \frac{l+r}{2}$). Посчитаем значения функции в точках $a = \frac{2l+r}{3}$ и $b = \frac{l+2r}{3}$. Теперь рассмотрим несколько вариантов:

   - $f(a) > f(b)$. Это возможно в двух случаях. Если $a < m$ и $b > m$, то искомый минимум лежит где-то на отрезке $[a, r]$ (а точнее на $[a, b]$). Если же $a < m$ и $b < m$, то минимум лежит на отрезке $[a, r]$ (а точнее на $[b, r]$). Поскольку мы можем не знать точно, какой из случаев имеет место, то выберем такие новые границы для отрезка $[l', r']$, чтобы по-прежнему в любом случае выполнялось $l' \leqslant m \leqslant r'$. В качестве такого нового отрезка подходит $[a, r]$. Иными словами, необходимо поставить $l = a$.
   - $f(a) < f(b)$. Этот случай абсолютно симметричен предыдущему. Если $a < m$ и $b > m$, то искомый минимум лежит на отрезке $[l, b]$. Это продемонстрировано на рисунке ниже. В случае $a > m$ и $b > m$ минимум также лежит на отрезке $[l, b]$. Значит, необходимо поставить $r = b$.



- $f(a) = f(b)$. Вот тут стоит быть внимательным. Если мы точно знаем, что функция ***строго унимодальна***, т.е. она сначала *строго* убывает, а потом *строго* возрастает, то данное равенство возможно лишь в случае $a < m$ и $b > m$, а значит, в качестве новых границ поиска следует задать $l = a,\ r = b$. Заметим, что ради упрощения этот случай можно отнести к любому из вышеперечисленных, поскольку какие бы новые границы мы не взяли, отрезок $[a, b]$ будет принадлежать любой из них. Однако если мы не можем гарантировать строгую унимодальность, то тернарный поиск неприменим. Действительно, в таком случае возможно еще 2 варианта: $a < m,\ b < m$ и $a > m,\ b > m$. И тут уже нельзя совершенно точно сказать, какие новые границы поиска следует задать. Если взять их за $[a, r]$, то в случае $a > m,\ b > m$ искомый минимум выйдет за пределы отрезка. Если же принять $[l, b]$, то это же самое произойдет при $a < m,\ b < m$.

2. После установки новых границ поиска вернемся к шагу 1.

Оценим скорость работы данного метода. После каждой итерации рассматриваемый отрезок уменьшается в 1.5 раза. Поэтому необходимое количество шагов n для достижения нужной точности ε можно оценить как $n = \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{r-l}{\varepsilon}\right) \right\rceil$. Несмотря на то, что тернарный поиск работает медленнее, чем метод бисекции, решаемая им задача сложнее. Внимательный читатель может заметить, что эту задачу можно решить, найдя производную функции, а затем ее 0 с помощью метода бисекции. Но такой вариант решения не подходит, т.к. мы не можем быть уверены, что $f'(l)$ и $f'(r)$ вообще существуют. Второй недостаток тернарного поиска заключается в том, что на каждом шаге необходимо вычислять значение функции в двух точках, что не очень эффективно. Поэтому оптимизируем данный поиск.

Заметим, что сходимость метода не зависит от выбора a и b на каждом шаге. Достаточно лишь выполнения условия $a < b$. Мы выбираем a и b как $a = \frac{2l+r}{3}$ и $b = \frac{l+2r}{3}$ лишь для того, чтобы каждый раз делить отрезок $[l, r]$ на 3 равные части, чтобы получать в некотором плане сбалансированное разбиение. Но, как мы сейчас выясним, это не самое оптимальное решение.

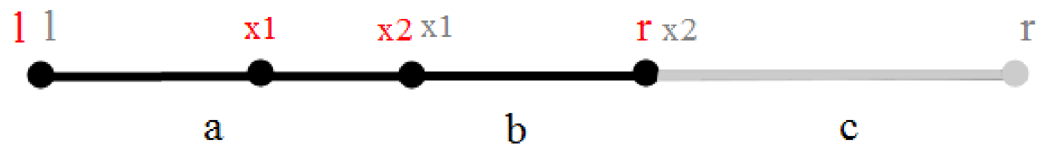
Попробуем подобрать такое разбиение отрезка на три части, чтобы на следующей итерации поиска одна из точек нового разбиения совпала с одной из точек текущего разбиения. Тогда в следующий раз не придется считать функцию в двух точках, так как в одной она уже была посчитана. Пусть a и b — точки, которые мы хотим выбрать, s — расстояние от l до a, s' — расстояние от a до b, а s'' — расстояние от b до r. Потребуем, чтобы выполнялось

$$\begin{cases} \frac{s+s'}{s''} = \varphi \\ \frac{s'+s''}{s} = \varphi \\ \frac{s}{s'} = \varphi \\ \frac{s''}{s'} = \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s+s' = \varphi s'' \\ s'+s'' = \varphi s \\ s = \varphi s' \\ s'' = \varphi s' \end{cases}$$

В данном случае, φ — это то отношение, в котором мы разбиваем отрезок. Получаем уравнение $\varphi + 1 = \varphi^2$, единственным положительным корнем которого является $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Это не что иное, как ***золотое сечение***. Теперь научимся вычислять точки a и b, пользуясь найденным отношением. Заметим, что достаточно найти s и s', тогда $a = l + s$, $b = l + s + s'$. Как мы уже знаем, $s' + s'' = \varphi s$. С другой стороны, $s' + s'' = r - l - s$. Т.е. $s = \frac{r-l}{\varphi+1}$. Для суммы получаем следующее: $s + s' = r - l - s'' = r - l - s = r - l - \frac{r-l}{\varphi+1}$.

Значит, $a = l + \frac{r-l}{\varphi+1}$ и $b = r - \frac{r-l}{\varphi+1}$. Таким образом, ***метод золотого сечения*** выглядит следующим образом:

1. Вычисляем a и b, пользуясь указанными выше формулами, а также $f_1 = f(a)$ и $f_2 = f(b)$.
2. Если $r - l < \varepsilon$, то искомый минимум найден. Теперь рассмотрим несколько вариантов, как и в тернарном поиске.
   - Если $f_1 > f_2$, то, как мы уже знаем, в качестве новых границ поиска следует поставить $[a, r]$, поэтому сдвинем границу $l = a$. После такого сужения отрезка точка a должна перейти в точку b, а значит следует поставить $a = b$ и $f_1 = f_2$. Осталось лишь пересчитать значения для b: $b = r - \frac{r-l}{\varphi+1}$, $f_2 = f(b)$.
   - $f_1 < f_2$, симметричный предыдущему случай. Новыми границами станут $[l, b]$, т.е. примем $r = b$. После этого сужения b перейдет в a, значит поставим $b = a$, $f_2 = f_1$. И вычислим новые значения для a: $a = l + \frac{r-l}{\varphi+1}$, $f_1 = f(a)$. Этот случай продемонстрирован на рисунке ниже. В наших обозначениях, x_1 это a, x_2 это b, а a, b, c соответственно расстояния s, s', s''.



   - $f_1 = f_2$. Аналогично троичному поиску, мы можем рассматривать этот случай в одном из двух вышеперечисленных, если функция строго унимодальна.
3. Вернемся к шагу 2.

Таким образом, вычислить значение функции в двух точках нужно лишь на самой первой итерации, на каждой следующей мы пользуемся уже ранее посчитанными значениями. На каждом шаге область поиска сужается в $\varphi \approx 1.62 > 1.5$ раз, т.е данный метод и сходится быстрее, нежели тернарный поиск.

5 Приближенное вычисление определенных интегралов

Рассмотрим задачу вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. В простейших случаях данный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, но на практике, в реальных задачах, чаще всего она не используется. Дело в том, что найти первообразную $f(x)$ зачастую очень сложно, нередко она и вовсе не выражается через элементарные функции. Однако вычислять интегралы каким-то образом все же нужно, и тут на помощь приходит геометрический смысл определенного интеграла.

Вспомним, как именно вычисляется определенный интеграл. Мы разбиваем отрезок $[a,b]$ на n частей, на каждой из которых берем некоторую точку ξ_i и прибавляем к общей сумме величину $f(\xi_i)\Delta x_i$. Устремляя размеры частей к 0, мы получаем искомую сумму. Понятно, что если размер каждой части не стремится к 0, то «площадь» (а это и есть геометрический смысл определенного интеграла) будет посчитана неточно. Чем меньше n (а соответственно, чем больше размер каждой части), тем менее точной оказывается посчитанная площадь.

Суть всех описанных здесь методов заключается в том, что теперь размер каждой части не стремится к 0. Мы выбираем n достаточно большим (чтобы минимизировать получившуюся ошибку), но в пределах разумного. Разница лишь в том, как именно мы теперь оцениваем величину $f(\xi_i)\Delta x_i$ для каждого i. Наиболее подробно мы рассмотрим метод прямоугольников — самый простой из описанных ниже. Но несколько слов скажем и о двух других.

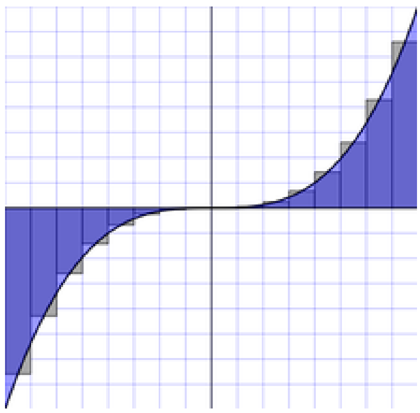
5.1 Метод прямоугольников

По названию можно понять, что каждый участок разбиения будет аппроксимироваться прямоугольником. Возьмем разбиение на n равных частей отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n} = b$. Пусть $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ — середины отрезков разбиения. Эти точки и выберем в качестве ξ_i. Учитывая, что длина каждого отрезка разбиения равна $\frac{b-a}{n}$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(x_1)(x_2 - x_0) + f(x_3)(x_4 - x_2) + \cdots + f(x_{2n-1})(x_{2n} - x_{2n-2}) + R =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})) + R.$$

Здесь R — некоторый остаточный член, т.е. погрешность. На рисунке приведен пример вычисления определенного интеграла, используя этот метод. Осталось самое главное: оценить это самое R. Для этого докажем следующую теорему.



Теорема 90.2. *Если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b]$, то $\exists \eta \in [a,b] : R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f^{(2)}(\eta)$.*

Доказательство. Для начала получим оценку для случая одного прямоугольника. Рассмотрим следующий интеграл для достаточно малого h:

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx = 2hf(0) + \widetilde{R}.$$

Чтобы оценить $\widetilde{R}$, введем два вспомогательных интеграла:

$$I_1 = \int\limits_0^h f^{(2)}(x)(x-h)^2\,dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{-h}^0 f^{(2)}(x)(x+h)^2\,dx.$$

Начнем с первого:

$$I_1 = \int\limits_0^h f^{(2)}(x)(x-h)^2\,dx = f'(x)(x-h)^2\Big|_0^h - 2\int\limits_0^h f'(x)(x-h)\,dx =$$

$$= -f'(0)h^2 - 2f(x)(x-h)\Big|_0^h + 2\int\limits_0^h f(x)\,dx = -f'(0)h^2 - 2f(0)h + 2\int\limits_0^h f(x)\,dx.$$

Аналогично берется и второй интеграл:

$$I_2 = \int\limits_{-h}^0 f^{(2)}(x)(x+h)^2\,dx = f'(0)h^2 - 2f(0)h + 2\int\limits_{-h}^0 f(x)\,dx.$$

Тогда получаем:

$$I_1 + I_2 + 4hf(0) = 2\int\limits_{-h}^h f(x)\,dx,$$

$$\frac{I_1+I_2}{2} + 2hf(0) = \int\limits_{-h}^h f(x)\,dx = 2hf(0) + \widetilde{R}.$$

В итоге:

$$\widetilde{R} = \frac{I_1+I_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^h f^{(2)}(x)(x-h)^2\,dx + \int\limits_{-h}^0 f^{(2)}(x)(x+h)^2\,dx\right) = \text{ по теореме о среднем } =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f^{(2)}(\xi_1)\int\limits_0^h (x-h)^2\,dx + f^{(2)}(\xi_2)\int\limits_{-h}^0 (x+h)^2\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(f^{(2)}(\xi_1)\cdot\frac{h^3}{3} + f^{(2)}(\xi_2)\cdot\frac{h^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{(2h)^3}{24}\cdot\frac{f^{(2)}(\xi_1)+f^{(2)}(\xi_2)}{2} = \frac{(2h)^3}{24}\cdot f^{(2)}(\xi), \text{ где } \xi\in[-h,h].$$

Последний переход сделан, учитывая тот факт, что $f^{(2)}(x)$ — непрерывная по условию функция, а значит она принимает все промежуточные значения. Таким образом, мы получили, что

$$\int\limits_{-h}^h f(x)\,dx = 2hf(0) + \frac{(2h)^3}{24}\cdot f^{(2)}(\xi),$$

т.е. имеем ошибку порядка h^3. Осталось лишь применить данную оценку ко всему интегралу:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_{2n-1})) + \frac{(b-a)^3}{24n^3}\cdot(f^{(2)}(\xi_1)+\cdots+f^{(2)}(\xi_n)) =$$

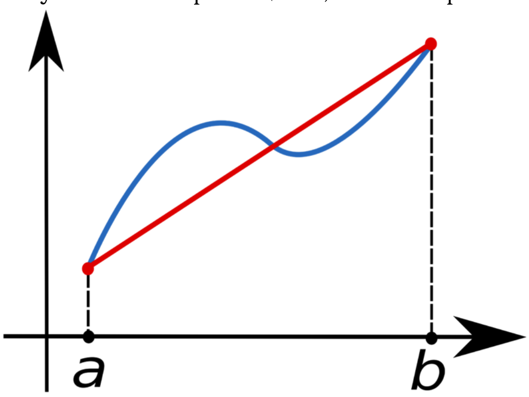
$$= \frac{b-a}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_{2n-1})) + \frac{(b-a)^3}{24n^2}f^{(2)}(\eta), \text{ где } \eta\in[a,b].$$

[:|||||:]

Заметим, однако, что оценить более-менее точно величину $f^{(2)}(\eta)$ зачастую достаточно трудно, поэтому обычно говорят, что $R \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max\limits_{[a,b]}|f^{(2)}(x)|$. Несмотря на то, что метод кажется слишком «грубым», он достаточно часто применяется на практике ввиду своей простоты.

5.2 Метод трапеций

Снова введем разбиение отрезка $[a,b]$ на n равных частей: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Рассмотрим некоторый участок разбиения. Чаще всего он представляет собой не что иное, как криволинейную трапецию. Поэтому достаточно логично будет аппроксимировать этот участок прямоугольной трапецией, что и проиллюстрировано на рисунке ниже:



Площадь такой трапеции равна

$$S = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a).$$

А значит, мы можем записать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\cdot\Delta x_i + R.$$

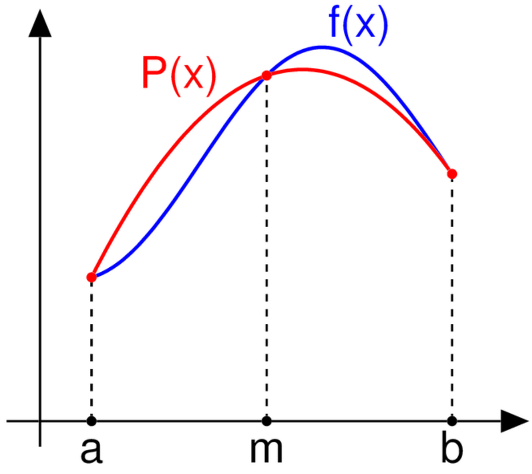
Однако погрешность в худшем случае получается в два раза больше, чем при вычислениях по методу прямоугольников. Иными словами, можно доказать, что

$$R \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{[a,b]}|f^{(2)}(x)|.$$

Но на практике этот метод обычно показывает более точные результаты, чем метод прямоугольников.

5.3 Метод Симсона

Также еще называется ***методом парабол***. Если в методе прямоугольников мы аппроксимировали значения функции на отрезке разбиения константой, в методе трапеций — прямой, то теперь мы аппроксимируем функцию многочленом степени 2, т.е. параболой.



И опять разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей. Рассмотрим некоторый участок разбиения $[x_{i-1}, x_i]$. Поскольку парабола однозначно строится по трем точкам, проведем ее через точки x_{i-1}, $\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$, x_i. Интерполируя и интегрируя, получаем следующую формулу:

$$S = \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_i)\right).$$

Суммируя по всем $i = \overline{1, n}$, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_i)\right) + R.$$

Погрешность этого метода уже значительно меньше. Если $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то имеет место следующая оценка:

$$R \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{[a,b]}|f^{(4)}(x)|.$$

Даже если четвертая производная функции $f(x)$ не существует, этот метод все равно заметно точнее предыдущих.

6 Вычисление кратных интегралов

6.1 Введение

В прошлый раз мы познакомились с несколькими численными методами интегрирования. К сожалению, данные методы плохо масштабируются на многомерный случай, поэтому рассмотрим простейший метод вычисления кратных интегралов. Он называется **методом Монте-Карло**, но, вообще говоря, это обобщенное название методов, использующих случайные величины. Поскольку сутью метода Монте-Карло является сведение задачи к расчету математических ожиданий, от читателя требуется минимальное знание курса теории вероятностей.

Предположим, что мы хотим найти значение m некоторой изучаемой величины. Выберем такую случайную величину X, что ее математическое ожидание равно m, т.е. $M[X] = m$. Задача нахождения m при этом, разумеется, никак не упростилась, т.к. для непрерывных случайных величин (а мы будем иметь дело с ними) в n-мерном пространстве вычисление математического ожидания сводится опять-таки к вычислению n несобственных интегралов.

Однако мы сформулировали задачу с точки зрения теории вероятностей, что позволяет воспользоваться большим количеством теорем. В частности, нам очень пригодится следующая теорема:

Теорема 90.3 (***Закон больших чисел***). *Пусть есть бесконечная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, определенных на одном* *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Пусть также* $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow M[X_i] = \mu$. *Тогда*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} S_n = \mu\right) = 1, \text{ где } S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Говоря проще, эмпирическое среднее (среднее арифметическое) достаточно большой конечной выборки из фиксированного распределения близко к теоретическому среднему (математическому ожиданию) этого распределения. Иными словами, взяв достаточно большую выборку значений случайной величины и посчитав среднее арифметическое, мы приближенно получим математическое ожидание этой случайной величины. Таким образом мы можем приближенно вычислять математическое ожидание любой случайной величины, причем со сколь угодно нужной точностью (правда для этого может потребоваться гигантская выборка). Теперь посмотрим, как это можно применить к вычислению интегралов. Начнем с простого одномерного случая.

6.2 Одномерный случай

Итак, пусть мы хотим вычислить интеграл

$$I = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Рассмотрим два основных способа это сделать с помощью случайных величин.

6.2.1 Первый способ

Возьмем случайную величину X, равномерно распределенную на отрезке интегрирования $[a, b]$. Напоминаем, что ее плотность выражается как

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Тогда

$$M[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

А значит,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)M[\varphi(x)].$$

Теперь, возвращаясь к предыдущим рассуждениям, заменим $M[\varphi(x)]$ его оценкой — выборочной средней, т.е.

$$M[\varphi(x)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(x_i),$$

где x_i — возможные значения случайной величины X (т.е. из отрезка $[a, b]$), а N — достаточно большое число испытаний. В итоге, получаем приближенное значение интеграла (1):

$$I \approx (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(x_i).$$

6.2.2 Второй способ

Подойдем теперь к той же задаче с другой стороны. Предположим, что $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant c$. Введем случайную величину (X, Y), равномерно распределенную в прямоугольнике $D = [a, b] \times [0, c]$. Снова напоминаем, что ее плотность равна

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)c}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

При этом составляющая X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$ с плотностью $\frac{1}{b-a}$, а составляющая Y равномерно распределена на отрезке $[0, c]$ с плотностью $\frac{1}{c}$. Теперь вспомним, что интеграл (1) численно равен площади под графиком $\varphi(x)$, которую в свою очередь можно считать как

$$I = \iint\limits_G dxdy, \text{ где } G = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)\}.$$

Введем случайную величину

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{если } (X,Y) \in G, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда ее математическое ожидание можно вычислить как

$$M[Z] = \iint\limits_D Zf(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{(b-a)c}\iint\limits_G dxdy = \frac{1}{(b-a)c}\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Тогда, если разыграно N точек, n из которых лежат под этим графиком, то это же математическое ожидание можно приближенно посчитать как $\frac{n}{N}$ при достаточно большом N. Тогда

$$\frac{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx}{(b-a)c} \approx \frac{n}{N}.$$

А значит,

$$I \approx (b-a)c\frac{n}{N}.$$

Отметим, что в многомерном случае используется комбинация этих двух методов. Однако, прежде чем пойти дальше, нужно сказать несколько слов о погрешности данного метода.

6.2.3 Погрешность

Вообще говоря, оценка погрешности метода Монте-Карло даже в одномерном случае представляет собой достаточно нетривиальную задачу и требует более глубоких познаний из теории вероятностей. На самом деле, нас интересуют только два параметра: N (количество случайных точек, которое используется и в многомерном случае) и ε — точность вычисления. Сразу приведем готовую схему выбора N по требуемому ε. Здесь приведена схема для первого способа, поскольку второй способ уже больше относится к многомерному случаю.

1. Выберем N_0 — начальное количество испытаний.

2. Сгенерируем N_0 случайных точек x_i, с помощью которых вычислим (1). Далее вычисляем

$$S^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} x_i^2 - \left(\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} x_i\right)^2.$$

Внимательный читатель заметит, что это не что иное, как приближенное значение дисперсии. Тогда

$$N = \frac{S^2 \cdot 1.96^2}{\varepsilon^2},$$

где N — минимальное число точек, нужное для достижения точности ε с надежностью в 95%.

3. Если оказалось, что $N_0 < N$, то проводим дополнительные испытания.

Подробнее о выборе N_0 мы скажем ниже, когда будем оценивать погрешность в многомерном случае.

6.3 Многомерный случай

6.3.1 Алгоритм

Пусть функция $y = f(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G и требуется вычислить m-кратный интеграл I по области G:

$$I = \int\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m. \tag{2}$$

Воспользуемся теперь первым способом. Заменим подынтегральную функцию на ее усредненное значение $\widetilde{F}$ (как его вычислять, будет показано далее). Тогда

$$I \approx \widetilde{F}\boxed{\int\limits_G \cdots \int dx_1 \ldots dx_m}. \tag{3}$$

Но под рамкой мы имеем не что иное, как m-мерный объем области G (обозначим его как S), вычислить который мы уже можем, используя второй способ. Таким образом, метод Монте-Карло состоит в следующем:

1. Найдем такой m-мерный параллелепипед K (пусть его объем равен V), что вся область G содержится внутри него.

2. Сгенерируем N случайных точек $\bar{x}_i$, равномерно распределенных в найденном параллелепипеде. Пусть n из них попали в область G (для удобства обозначений будем считать, что попали первые n точек).

3. Вычислим усредненное значение подынтегральной функции

$$\widetilde{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i).$$

4. Посчитаем n-мерный объем области G, пользуясь соотношением

$$\frac{S}{V} \approx \frac{n}{N} \Rightarrow S = V\frac{n}{N}.$$

5. Наконец, вычислим приближенно интеграл (2), пользуясь формулой (3):

$$I \approx \widetilde{F}S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot V\frac{n}{N} = \boxed{\frac{V}{N}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)}.$$

Здесь необходимо сделать несколько примечаний. Во-первых, напоминаем как считать объем m-мерного параллелепипеда. Если $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$, то $V = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$. Во-вторых, отметим, что если объем области G можно вычислить аналитически, то тогда лучше пользоваться формулой (3), а не последней приведенной.

Единственная сложность при применении этого метода состоит в поиске ограничивающего прямоугольника K. Заметим, что чем точнее K ограничивает область G, тем точнее будет посчитан интеграл (2) при одних и тех же значениях N. На практике K можно искать либо с помощью графика области G (в случае, если ищется двукратный или трехкратный интеграл), либо же поиском всех максимумов (по каждому аргументу) области G (если G задана, например, как неявная функция).

Теперь осталось лишь оценить погрешность данного метода, после чего рассмотрим несколько примеров.

6.3.2 Погрешность

Погрешность ΔI вычисляется с надежностью в 95% по следующей формуле:

$$\Delta I = 1.96V\left(\frac{S_1\sqrt{\Omega}}{\sqrt{N}} + \frac{S_2|\widetilde{F}|}{\sqrt{N}}\right),$$

где

$$\Omega = \frac{n}{N},$$
$$S_1^2 = \widetilde{F}^2 - (|\widetilde{F}|)^2,$$
$$S_2^2 = \Omega \cdot (1 - \Omega).$$

Отсюда можно выразить необходимое число точек N, нужное для достижения требуемой погрешности ΔI:

$$N = \left(\frac{1.96V(S_1\sqrt{\Omega} + |\widetilde{F}|S_2)}{\Delta I}\right)^2.$$

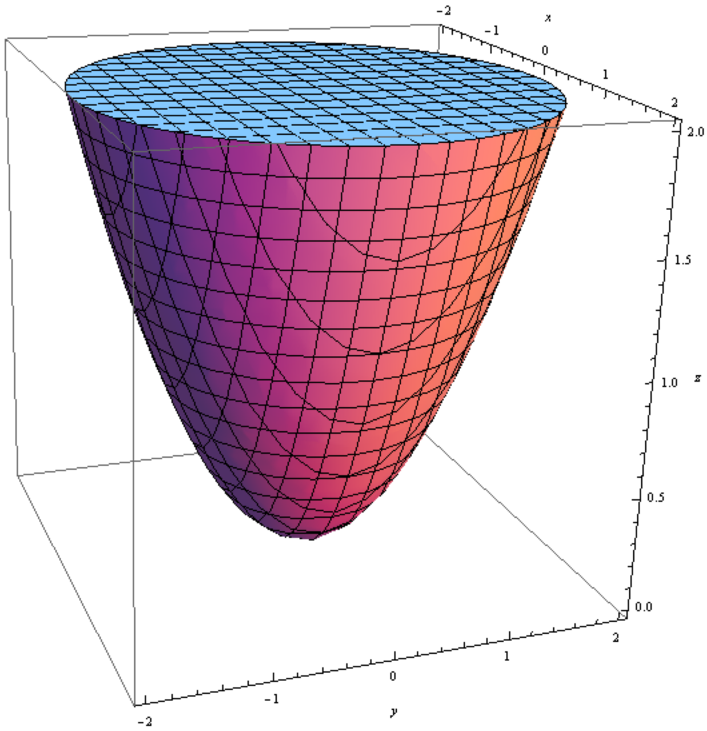
Обычно на практике в случае достаточно небольших областей интегрирования можно брать N порядка 10^7-10^8, что даст абсолютную погрешность порядка 10^{-4}.

6.3.3 Примеры

Вычислим численно интеграл

$$\iiint\limits_G (x^2 + y^2)\,dxdydz, \text{ где } G = \left\{(x, y, z) \mid \frac{x^2 + y^2}{2} \leqslant z \leqslant 2\right\}.$$

Для начала ограничим область G прямоугольником. Поскольку $-\sqrt{2z} \leqslant x \leqslant \sqrt{2z}$ и $-\sqrt{2z} \leqslant y \leqslant \sqrt{2z}$, то $K = [-2, 2] \times [-2, 2] \times [0, 2]$. Теперь если взять $N = 10^7$, то полученный ответ будет отличаться от реального (который равен $\frac{16\pi}{3}$) примерно на 10^{-3}. Область G, кстати, выглядит следующим образом:



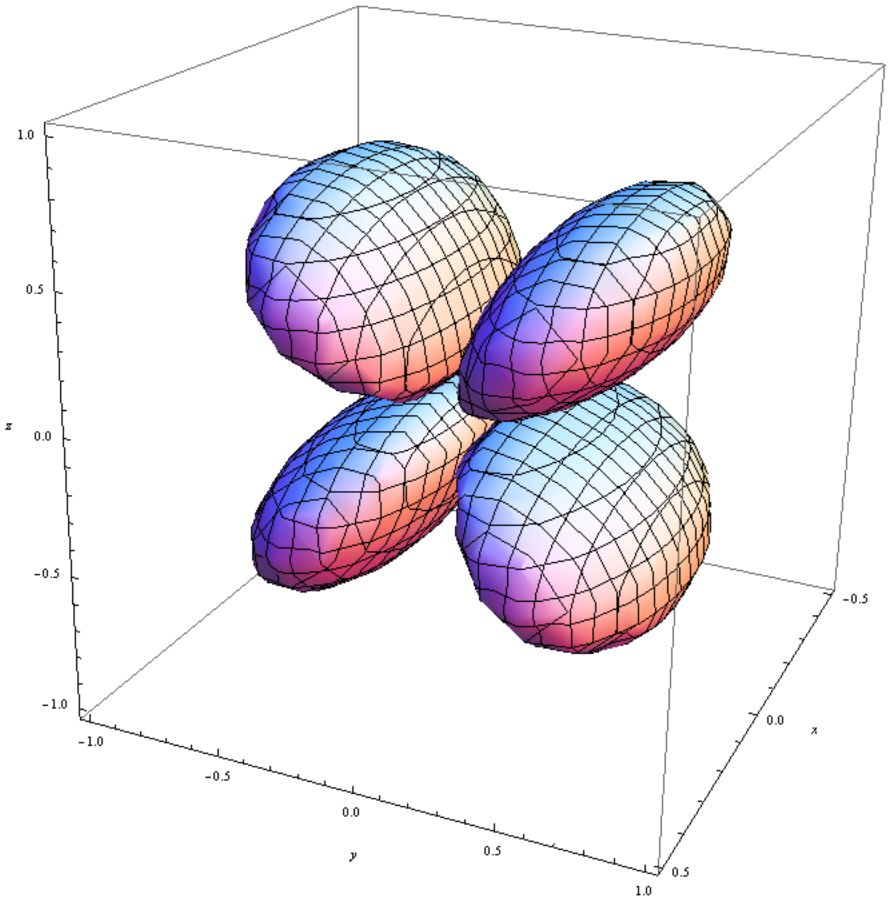
В данном случае K легко можно было найти аналитически, но, вообще говоря, это не всегда так. Например, найдем объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 4y^2 z^2.$$

Для этого посчитаем трехкратный интеграл по области G:

$$\iiint\limits_G dxdydz, \text{ где } G = \left\{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leqslant 4y^2 z^2\right\}.$$

Аналитическое взятие этого интеграла уже не так тривиально, как в предыдущем номере. Опять-таки, найти ограничивающий прямоугольник тоже непросто. Можно грубо прикинуть $K = [-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}] \times [-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}] \times [-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$. При такой оценке, если выбрать $N = 10^7$, то полученная погрешность составит около $2 \cdot 10^{-3}$. Но можно построить график:



Отсюда видно, что хорошим выбором будет $K = [-0.5, 0.5] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Теперь при $N = 10^7$ погрешность составит уже 10^{-4} (точный ответ, кстати, равен $\frac{256}{315}$).

Часть 91

Бонусная часть

Здесь представлен различный полезный справочный материал, который отсутствует в основной части.

1 Различные равенства и неравенства

- $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ при $x \neq 1$.
- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- $$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

- $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

- $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$ при $n > 1$.

- При $x \in (0, 2\pi)$

  $$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

- *Неравенство Бернулли.* Пусть $x_i \cdot x_j \geqslant 0,\ x_i > -1$ для любых i, j. Тогда

  $(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + \dots + x_n$.

- Пусть $x_i > 0$ для любого i и $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Тогда $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geqslant n$.

- *Неравенство между средними.* Пусть $a_i > 0$ для любых i. Тогда

  $$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

- Пусть $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$, причем $n > 1$. Тогда $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

- Пусть $p \in \mathbb{R}$ и $p \geqslant 1$, а также $a_i \geqslant 0$ для любых i. Тогда

  $a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \leqslant (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p$.

- При $n, k \in \mathbb{N}$ и $n > k > 0$

  $$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!} \leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

- При $x \geqslant 1$

  $$2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} < 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x-1}.$$

- $$x - \frac{x^3}{2} \leqslant x\cos x \leqslant \frac{x\cos x}{1 - \dfrac{x^2}{3}} \leqslant x\sqrt[3]{\cos x} \leqslant x - \frac{x^3}{6} \leqslant x\cos\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant \sin x.$$

- *Неравенство Юнга.* Пусть $a, b > 0$ и $p > 1$, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

  $\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}$, где знак равенства имеет место только при $a = b$.

- *Неравенство Гёльдера.* Пусть $x_i, y_i \geqslant 0$ и $p > 1$, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$

- *Неравенство Минковского.* Пусть $x_i, y_i \geqslant 0$ и $p > 1$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

2 Тригонометрические тождества

2.1 Классика

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.
- $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$.
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.
- $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$.
- $\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$.
- $\sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$.
- $\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$.
- $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$.
- $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{\sin(x+y) - \sin(x-y)}$.
- $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)}$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$.
- $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$.
- $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$.
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.
- $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$.
- $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$.
- $A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \varphi)$, где $\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, а $\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.
- $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $\arccos x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
- $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0. \end{cases}$

2.2 Гиперболические функции

- $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
- $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$.
- $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
- $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$.
- $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}$.
- $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
- $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.
- $\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$.
- $\operatorname{cth} 2x = \frac{1}{2}(\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x)$.
- $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)}{2}$.
- $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)}{2}$.
- $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)}{2}$.
- $\operatorname{th} x \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)}{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)}$.
- $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}$.
- $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$.
- $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$.
- $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}$.
- $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$.
- $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$.

3 Предел числовой последовательности

- *Число e.* В равенстве ниже $0 < \theta_n < 1$.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}.$$

- *Формула Стирлинга.* $\ln n! = n \ln n - n + \underline{\mathrm{O}}(\ln n)$, или

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

- **Теорема 91.1** (***Теорема Штольца***)**.** *Пусть x_n и y_n — две последовательности вещественных чисел, причем $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ и $\exists N : \forall n \geqslant N \Rightarrow y_{n+1} > y_n$. Кроме того, пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$, где $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ (важно, что $A \neq \infty$). Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Например, пусть имеется предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}$. $y_n = \ln n$, очевидно, возрастает и $\{\ln n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n} = 1.$$

- $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — произвольные последовательности. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$
$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

-

Теорема 91.2 (*Теорема Тёплица*). *Пусть последовательность A_{nm} зависит от двух индексов и удовлетворяет условиям:*

1. $A_{nm} \geqslant 0$ *для любых* $m, n \in \mathbb{N}$.
2. $A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn} = 1$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ *для любого фиксированного* $m \in \mathbb{N}$.

Пусть также имеется последовательность $\{x'_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a < \infty$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} A_{nm} x'_n = a.$$

Например, пусть $x_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$, причем $a_i > 0$. Введем $A_{nk} = \dfrac{\dfrac{1}{a_k}}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$.
Тогда выполняется:

1. $A_{nk} \geqslant 0$.
2. $A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn} = \dfrac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} = 1.$
3.

$$\lim_{n\to\infty} A_{nk} = \frac{\dfrac{1}{a_k}}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_1} - \cdots - \dfrac{1}{a_{n-1}}} = 0.$$

Последний переход выполнен по теореме Штольца. В итоге получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{nk} a_k = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} = x_n$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Из этой теоремы помимо только что показанного можно вывести следующие 3 свойства:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

4 Функции

- Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1) = A$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^A$.

  Все последующие эквивалентности даны при условии, что $x \to 0$.

- $\sin x \sim x$.
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.
- $\operatorname{tg} x \sim x$.
- $\arcsin x \sim x$.
- $\operatorname{arctg} x \sim x$.
- $e^x - 1 \sim x$.
- $\ln(1+x) \sim x$.
- $(1+x)^m - 1 \sim mx$.
- $a^x - 1 \sim x \ln a$.
- $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$.
- $\operatorname{sh} x \sim x$.
- $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

- **Теорема 91.3** (***Теорема Лагранжа***)**.** *Если выполнено:*

  1. $f(x) \in \mathrm{C}[a,b]$.
  2. $f(x)$ *дифференцируема на* (a,b).

  Тогда $\exists \gamma \in (a,b)$, *для которой* $f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b-a)$.

- **Теорема 91.4** (***Теорема Коши о конечном приращении***)**.** *Пусть для функций* $x(t)$ *и* $y(t)$ *выполнено:*

  1. $x(t), y(t) \in \mathrm{C}[\alpha,\beta]$.
  2. $x(t), y(t)$ *дифференцируема на* (α,β).

  Тогда:

  1. $\exists \tau \in (\alpha,\beta) : x'(\tau)(y(\beta)-y(\alpha)) = y'(\tau)(x(\beta)-x(\alpha))$.
  2. *Если* $x'(t) \neq 0$ *для* $\forall t \in [\alpha,\beta]$, *то* $\frac{y(\beta)-y(\alpha)}{x(\beta)-x(\alpha)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}$.

- **Теорема 91.5** (***Первое правило Лопиталя***)**.** *Пусть на некоторой окрестности* $\mathrm{U}'_\delta(a)$ *для функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *выполняется:*

  1. f *и* g *дифференцируемы.*
  2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.
  3. $g'(x) \neq 0$.
  4. $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

  Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

•

Теорема 91.6 (***Второе правило Лопиталя***). *Пусть на некоторой окрестности* $\mathrm{U}'_\delta(a)$ *для функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *выполняется:*

1. f *и* g *дифференцируемы.*
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.
3. $g'(x) \neq 0$.
4. $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

5 Функции нескольких переменных

•

Теорема 91.7 (***Достаточное условие существования двойного предела***). *Пусть функция* $f(x,y)$ *определена в проколотой окрестности точки* (x_0, y_0), *и* $\exists \rho_0 > 0 : \forall\varphi,\ \forall\rho \in (0,\rho_0) \Rightarrow |f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi) - b| \leqslant F(\rho)$, *где* $\lim\limits_{\rho\to 0+0} F(\rho) = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$.

- Для функции $f(\bar{x})$:

$$df(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

- Для функции $u = f(x,y)$, где x и y — независимые переменные,

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

- Пусть $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — два раза дифференцируемые функции некоторых независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Тогда

$$d^2u = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k.$$

•

Теорема 91.8 (***Формула конечных приращений Лагранжа***). *Если функция* $f(\bar{x})$ *дифференцируема на множестве* $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, *то* $\forall \bar{x} : \bar{x} + \Delta\bar{x} \in \mathbb{G} \Rightarrow \exists \Theta \in (0,1)$, *такое что*

$$f(\bar{x}+\Delta\bar{x}) - f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x}+\Theta\Delta\bar{x})}{\partial x_i}\Delta x_i.$$

- Пусть поверхность S в $\mathbb{R}^3$ задана непрерывной функцией $z = f(x, y)$, т.е.
$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\} \text{ и } m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S.$$
Предположим также, что функция $f(x, y)$, задающая поверхность S непрерывно дифференцируема в области D. Тогда *касательная плоскость* к S существует в любой точке m_0 и имеет уравнение
$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$
Уравнение же нормали в точке m_0 имеет вид:
$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}.$$

- Если поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, причем функция F непрерывно дифференцируема в области $G \subset \mathbb{R}^3$, $m_0 \in G$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $(F'_x(m_0))^2 + (F'_y(m_0))^2 + (F'_z(m_0))^2 \neq 0$, то касательная плоскость в точке m_0 существует и имеет уравнение
$$F'_x(m_0)(x - x_0) + F'_y(m_0)(y - y_0) + F'_z(m_0)(z - z_0) = 0.$$

6 Таблица производных

- $(const)' = 0$.
- $x' = 1$.
- $(x^m)' = mx^{m-1},\ m \in \mathbb{R}$.
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
- $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m}{x^{m+1}}$.
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
- $(\sin x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
- $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
- $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
- $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
- $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ при $|x| < 1$.
- $(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ при $|x| > 1$.
- $(e^x)' = e^x$.
- $(a^x)' = a^x \ln a$.
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
- $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$.
- $(\operatorname{sgn} x)' = 0$.

- $$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot \left(g'(x)\ln x + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right) = \\ = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln x + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right).$$

7 Производные n-ого порядка

- $(x^p)^{(n)} = p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)x^{p-n}$.
- $((ax+b)^p)^{(n)} = a^n p(p-1)\dots(p-n+1)(ax+b)^{p-n}$.
- $(e^x)^{(n)} = e^x$.
- $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$.
- $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right)$.
- $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right)$.
- $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.
- $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$.
- $(af(x) + bg(x))^{(n)} = af^{(n)}(x) + bg^{(n)}(x)$.
- *Формула Лейбница.*

  $$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x).$$

8 Ряды Маклорена

- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n).$$
- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n}).$$
- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1}).$$
- $$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \bar{o}(x^9).$$

- $$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \frac{2x^9}{93555} + \bar{o}(x^9).$$

- $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n).$$

- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \bar{o}(x^n).$$

- $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots + \frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)(n!)^2(4^n)}x^n + \bar{o}(x^n).$$

- $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n),\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

- $$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+2}),\ \text{при } |x| < 1.$$

- $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n}),\ \text{при } |x| < 1.$$

- $$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n}).$$

- $$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \bar{o}(x^{2n+1}).$$

- $$\operatorname{arsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \dots + \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+2}),\ \text{при } |x| < 1.$$

- $$\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n}),\ \text{при } |x| < 1.$$

9 Таблица неопределенных интегралов

Константа C везде опущена, но, разумеется, ее присутствие подразумевается. Здесь приведены наиболее важные неопределенные интегралы. За более полным списком читатель может обратиться к википедии.

- $\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1 \\ \ln|x|, & n = -1 \end{cases}.$
- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$
- $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$
- $\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$
- $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|.$
- $\int \log_b x\,dx = x\frac{\ln x-1}{\ln b}.$
- $\int e^x\,dx = e^x.$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}.$
- $\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\ (a>0).$
- $\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\frac{x}{a}\ (a>0).$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|\ (a>0).$
- $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2\pm x^2}\ (a>0).$
- $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a>0).$
- $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2\pm a^2}|\ (a>0).$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x.$
- $\int \cos x\,dx = \sin x.$
- $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|.$
- $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x|.$
- $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x).$
- $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x).$
- $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$
- $\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}.$
- $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$
- $\int \operatorname{arcctg} x\,dx = x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$
- $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x.$
- $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x.$
- $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln|\operatorname{ch} x|.$
- $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln|\operatorname{sh} x|.$
- $\int \operatorname{arsh} x\,dx = x\operatorname{arsh} x - \sqrt{x^2+1}.$
- $\int \operatorname{arch} x\,dx = x\operatorname{arch} x - \sqrt{x^2-1}.$
- $\int \operatorname{arth} x\,dx = x\operatorname{arth} x + \frac{1}{2}\ln|1-x^2|.$
- $\int \operatorname{arcth} x\,dx = x\operatorname{arcth} x + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|.$
- $\int |x|\,dx = \frac{|x|x}{2}.$
- $\int \operatorname{sgn} x\,dx = |x|.$
- $\int \operatorname{sgn} x\cdot f(x)\,dx = \operatorname{sgn} x\int f(x)\,dx.$

- Пусть x^2+px+q — неприводимый многочлен, т.е. $\frac{p^2}{4}-q<0$. Тогда

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}.$$

- $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}\,dx = -\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)K_\lambda, \text{ где}$$

$$K_\lambda = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}, & \lambda = 1 \\ \frac{x+\frac{p}{2}}{2a^2(\lambda-1)\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right)^{\lambda-1}} + \frac{2\lambda-3}{a^2(2\lambda-2)}K_{\lambda-1}, \text{ где } a^2 = q-\frac{p^2}{4}, & \lambda > 1 \end{cases}$$

10 Методы интегрирования

Методы подстановки и интегрирования по частям описаны на странице 108.

10.1 Интегрирование рациональных функций

10.1.1 Метод неопределенных коэффициентов

Предположим, что нужно вычислить интеграл $\int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4}$. Разобьем эту дробь на несколько более простых:

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1-\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = 1-\frac{ax+b}{x^2+1}-\frac{cx+d}{x^2+4}.$$

Приведем все к общему знаменателю:

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{(ax+b)(x^2+4)+((cx+d)(x^2+1))}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x^3(a+c)+x^2(b+d)+x(4a+c)+(4b+d)}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

А теперь просто найдем коэффициенты a, b, c и d:

$$\begin{cases} a+c &= 0 \\ b+d &= 5 \\ 4a+c &= 0 \\ 4b+d &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=C &= 0 \\ B &= -\frac{1}{3} \\ D &= \frac{16}{3} \end{cases}$$

Тогда получаем следующий результат:

$$\int \left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x^2+4}\right)dx = x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

10.1.2 Метод Остроградского

Интеграл от рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представим в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

где

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x-a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s - 1}$$
$$Q_2(x) = (x-a_1) \dots (x-a_r)(x^2 + p_1 x + q_1) \dots (x^2 + p_s x + q_s).$$

Иными словами, $Q(x) = Q_1(x) Q_2(x)$. Степень многочлена $P_1(x)$ на 1 меньше степени $Q_1(x)$, а степень $P_2(x)$ на 1 меньше $Q_2(x)$. Сами многочлены ищутся с помощью метода неопределенных коэффициентов. Например, рассмотрим следующий пример:

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3+1} + \int \frac{dx^2+ex+f}{x^3+1}\,dx.$$

Продифференцируем обе части равенства

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2ax+b)(x^3+1) - 3x^2(ax^2+bx+c)}{(x^3+1)^2} + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+1}.$$

Теперь приведем все к одному знаменателю и приведем подобные слагаемые. Получим

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{dx^5 + x^4(-a+e) + x^3(-2b+f) + x^2(-3c+d) + x(2a+e) + b + f}{(x^3+1)^2}.$$

Решая систему, находим $a = 0, b = \frac{1}{3}, c = 0, d = 0, e = 0, f = \frac{2}{3}$. Имеем:

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^3+1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3+1}.$$

А последний интеграл уже легко можно взять с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Заметим, что чем больше кратность корней знаменателя $Q(x)$, тем эффективнее оказывается метод Остроградского в сравнении с методом неопределенных коэффициентов.

10.2 Рационализация интегралов

Основные подстановки, нужные для взятия интегралов некоторых тригонометрических выражений, дробно-линейных и квадратичных иррациональностей, можно найти на странице 114.

Здесь же рассмотрим несколько частных случаев:

1. Чтобы вычислить интеграл вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, нужно воспользоваться следующим равенством:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Здесь $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$, а λ — какой-то коэффициент. Дифференцируя данное равенство и пользуясь методом неопределенных коэффициентов, находим $Q_{n-1}(x)$ и λ.

2. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-f)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

вычисляются при помощи замены $t = \frac{1}{x-f}$. В результате нехитрых манипуляций они приводятся к такому:

$$-\int \frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}},$$

где $A = af^2 + b + c$, $B = 2af + b$ и $C = a$. А вычисление такого интеграла описано в предыдущем пункте.

3. Теперь вычислим такой интеграл:

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Обозначим $Y = ax^2 + bx + c$. Легче всего взять приведенный интеграл с помощью *подстановки Абеля*

$$t = (\sqrt{Y})' = \frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$
$$4t^2Y = 4ax^2 + 4abx + b^2.$$

Теперь вычтем последнее равенство из умноженного на $4a$ равенства $Y = ax^2 + bx + c$:

$$4(a-t^2)Y = 4ac - b^2 \Rightarrow Y^n = \left(\frac{4ac-b^2}{4(a-t^2)}\right)^n = \left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{(a-t^2)^n}.$$

Теперь воспользуемся равенством $t\sqrt{Y} = ax + \frac{b}{2}$. Продифференцируем обе части:

$$d(t\sqrt{Y}) = d\left(ax + \frac{b}{2}\right),$$
$$\left(\frac{dt}{dx}\cdot\sqrt{Y} + t(\sqrt{Y})'\right)dx = adx,$$
$$dt\sqrt{Y} + t^2dx = adx,$$
$$\frac{dx}{\sqrt{Y}} = \frac{dt}{a-t^2}.$$

Теперь все составные части искомого интеграла выражены через t, поэтому произведем подстановку:

$$\int \frac{dx}{Y^{n+\frac{1}{2}}} = \int \frac{dx}{Y^n\sqrt{Y}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^n \int (a-t^2)^{n-1}\,dt.$$

4. Наконец рассмотрим интеграл от *дифференциального бинома*

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx.$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}$ и $m, n, p \in \mathbb{Q}$, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$. *Теорема Чебышева* утверждает, что данный интеграл может быть приведен к интегрированию рациональной дроби лишь в трех случаях:

- p — целое. Тогда примем $x = z^N$, где N — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.
- $\frac{m+1}{n}$ — целое. Тогда примем $a + bx^n = z^N$, где N — знаменатель дроби p.
- $\frac{m+1}{n} + p$ — целое. Тогда примем $ax^{-n} + b = z^N$, где N — знаменатель дроби p.

Нетрудно убедиться во всех трех случаях, что после подстановок получится рациональная функция.

10.3 Обобщенная формула интегрирования по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ по $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемы, тогда справедливо:

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx.$$

Особенно выгодно пользоваться этой формулой, когда одним из множителей подынтегральной функции служит целый многочлен. Если $u(x)$ — многочлен степени n, то $u^{(n+1)}(x) = 0$, и для интеграла в левой части получается окончательное выражение. Например, читатель может попробовать взять этим методом интеграл $\int (x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x + 1)\operatorname{ch} x\,dx$.

10.4 Более нестандартные примеры

1. Попробуем вычислить интеграл $\int \min\{5 - x^2, 1, x^2\}\,dx$. Имеем:

$$\int \min\{5-x^2,1,x^2\}\,dx = \int \begin{cases} 5-x^2, & x < -2 \\ 1, & -2 \leqslant x < -1 \\ x^2, & -1 \leqslant x < 1 \\ 1, & 1 \leqslant x < 2 \\ 5-x^2, & 2 \leqslant x \end{cases} dx = \begin{cases} 5x - \frac{x^3}{3} + C_1, & x < -2 \\ x + C_2, & -2 \leqslant x < -1 \\ \frac{x^3}{3} + C, & -1 \leqslant x < 1 \\ x + C_3, & 1 \leqslant x < 2 \\ 5x - \frac{x^3}{3} + C_4, & 2 \leqslant x \end{cases}$$

Очень важно, что во всех случаях используются разные константы. Дело в том, что если использовать одну и ту же константу C, то полученная первообразная будет иметь разрыв в точках $-2, -1, 1, 2$, чего по определению быть не должно. Теперь нужно выразить все константы через одну таким образом, чтобы получившаяся функция была непрерывна в указанных точках. Иными словами, необходимо, чтобы выполнялось условие $F(x-0) = F(x+0)$ во всех подозрительных на разрыв точках x. Тогда получаем:

(a) При $x = -2$ должно выполняться $5x - \frac{x^3}{3} + C_1 = x + C_2$, т.е. $-10 + \frac{8}{3} + C_1 = -2 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 + \frac{16}{3}$.

(b) При $x = -1$, $-1 + C_2 = -\frac{1}{3} + C \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3} + C \Rightarrow C_1 = C + 6$.

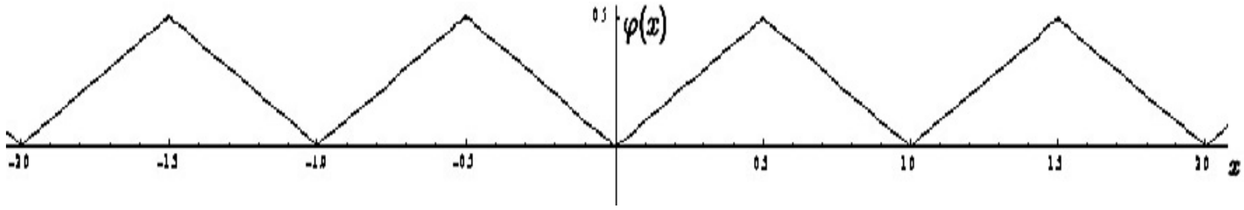
(c) При $x = 1$, $\frac{1}{3} + C = 1 + C_3 \Rightarrow C_3 = C - \frac{2}{3}$.

(d) При $x = 2$, $2 + C_3 = 10 - \frac{8}{3} + C_4 \Rightarrow C_4 = C_3 - \frac{16}{3} = C - 6$.

Таким образом, получаем следующий результат:

$$\int \min\{5-x^2,1,x^2\}\,dx = \begin{cases} 5x - \frac{x^3}{3} + 6 + C, & x < -2 \\ x + \frac{2}{3} + C, & -2 \leqslant x < -1 \\ \frac{x^3}{3} + C, & -1 \leqslant x < 1 \\ x + C - \frac{2}{3}, & 1 \leqslant x < 2 \\ 5x - \frac{x^3}{3} + C - 6, & 2 \leqslant x \end{cases}$$

2. Пусть $\varphi(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа (график этой функции представлен ниже). Найдем $\int \varphi(x)\,dx$.



Пусть n — ближайшее к x число. Тогда $\varphi(x) = |x-n|$, причем $-\frac{1}{2}+n \leqslant x < \frac{1}{2}+n$. Но $\int |x-n|\,dx = \frac{(x-n)|x-n|}{2} + C_n$. Как и в предыдущем примере, необходимо убрать все разрывы. Подозрительными точками являются все $x = n+\frac{1}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Снова воспользуемся условием $F\left(n+\frac{1}{2}-0\right) = F\left(n+\frac{1}{2}+0\right)$:

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}-n\right)\left|n+\frac{1}{2}-n\right|}{2} + C_n = \frac{\left(n+\frac{1}{2}-n-1\right)\left|n+\frac{1}{2}-n-1\right|}{2} + C_{n+1}$$

$$\frac{1}{8} + C_n = -\frac{1}{8} + C_{n+1} \Rightarrow C_{n+1} = \frac{1}{4} + C_n$$

$$C_n = \frac{1}{4} + C_{n-1} = \frac{2}{4} + C_{n-2} = \ldots = \frac{n}{4} + C_0 = \frac{n}{4} + C.$$

Осталось лишь избавиться от n:

$$n - \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2} + n$$

$$n \leqslant x + \frac{1}{2} < n+1$$

$$n = \left[x + \frac{1}{2}\right].$$

Итак, получаем

$$\int \varphi(x)\,dx = \frac{\left(x - \left[x+\frac{1}{2}\right]\right)\left|x - \left[x+\frac{1}{2}\right]\right|}{2} + \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{4} + C.$$

3. Рассмотрим пример, на котором ошибаются практически все известные пакеты символьного интегрирования. Ошибка состоит в том, что они не производят «склейку» полученных первообразных в непрерывную функцию.

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\,dx = \int |\cos x - \sin x|\,dx =$$
$$= \int \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x)\,dx = -\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) + C_n.$$

Последний переход сделан именно так, потому что $\operatorname{sgn} x$ — это просто константа. Заметим, что sgn разрывен во всех точках, где $\cos x = \sin x$, т.е. в $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Значит, имеем

$$\begin{cases} \cos x + \sin x + C_0, & -\frac{3\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{4} \\ -(\cos x + \sin x) + C_1, & \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{5\pi}{4} \\ & \ldots \\ (-1)^n(\cos x + \sin x) + C_n, & \frac{\pi}{4} + \pi(n-1) \leqslant x < \pi n \end{cases}$$

Из условия $\pi(n-1) \leqslant x - \frac{\pi}{4} < \pi n$ следует, что $n \leqslant x + \frac{3\pi}{4} < n+1$, т.е. $n = \left[\frac{x+\frac{3\pi}{4}}{\pi}\right]$. Осталось лишь «убрать разрывы»: $F\left(\pi n + \frac{\pi}{4} - 0\right) = F\left(\pi n + \frac{\pi}{4} + 0\right)$. Тогда:

$$(-1)^n\sqrt{2} + C_n = (-1)^{n+1}\sqrt{2} + C_{n+1} \Rightarrow C_{n+1} = (-1)^n \cdot 2\sqrt{2} + C_n,$$
$$C_n = C_0 + \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot 2\sqrt{2}.$$

11 Определенные и несобственные интегралы

Теорема 91.9 (*Обобщение формулы Ньютона-Лейбница*). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $f(x)$ терпит разрывы первого рода во внутренних точках $c_i \in (a,b)$, $i \in \overline{1,n}$, и, может быть, в точках a и b. Кроме того, пусть $F'(x) = f(x)$ за исключением точек разрыва. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) + \sum_{i=1}^{n}(F(c_i-0) - F(c_i+0)).$$

Теорема 91.10 (*Аналог формулы интегрирования по частям для несобственного интеграла*). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывно дифференцируемые на луче $[a,+\infty)$ функции, один из интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ сходится, и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$. Тогда сходятся оба указанных интеграла, причем справедлива формула*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.$$

Во всех приведенных ниже формулах предполагается, что данные функции обладают всеми необходимыми свойствами для взятия интеграла. a и b — ограничивающие параметры.

- Объем тела вращения вокруг Oy фигуры в декартовых координатах:

  $$V_y = 2\pi \int\limits_a^b xy(x)\,dx.$$

- Объем тела вращения вокруг Ox фигуры, заданной параметрически:

  $$V_x = \pi \int\limits_b^a y^2(t)x'(t)\,dt.$$

- Объем тела вращения вокруг Oy фигуры, заданной параметрически:

  $$V_y = \pi \int\limits_a^b x^2(t)y'(t)\,dt.$$

- Объем тела вращения вокруг Ox фигуры, заданной в полярных координатах:

$$V_x = \frac{2\pi}{3} \int\limits_a^b r^3(\varphi)|\sin\varphi|\, d\varphi.$$

- Площадь поверхности, образованной при вращении вокруг Ox:

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b |y(x)|\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

- Площадь поверхности, образованной при вращении вокруг Oy:

$$S_y = 2\pi \int\limits_a^b |x(y)|\sqrt{1 + (x'(y))^2}\, dy.$$

- Площадь поверхности, образованной при вращении параметрически заданной кривой вокруг Ox:

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

- Площадь поверхности, образованной при вращении параметрически заданной кривой вокруг Oy:

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

- Площадь поверхности, образованной при вращении фигуры, заданной в полярных координатах вокруг Ox:

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b r(\varphi)|\sin\varphi|\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

12 Числовые ряды

Здесь приведены все основные признаки сходимости и прочее, относящееся к числовым рядам.

12.1 Основные признаки сходимости

- ***Преобразование Абеля.*** Пусть $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

- ***Признак Даламбера.*** Пусть $a_n > 0$, начиная с некоторого номера n_0, и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда при

$$\begin{cases} q < 1, \text{ ряд } \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ сходится,} \\ q > 1, \text{ ряд } \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ расходится,} \\ q = 1, \text{ требуется дополнительный анализ.} \end{cases}$$

- ***Признак Коши.*** Пусть $a_n \geqslant 0$, начиная с некоторого номера n_0, и $\exists \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда при

$$\begin{cases} q < 1, \text{ ряд } \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ сходится,} \\ q > 1, \text{ ряд } \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ расходится,} \\ q = 1, \text{ требуется дополнительный анализ.} \end{cases}$$

- ***Интегральный признак Коши-Маклорена.*** Пусть $f(x)$ неотрицательна и не возрастает, начиная с некоторого номера m. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{m}^{+\infty} f(x)\,dx$.

- ***Признак Раабе.*** Пусть $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu$. Тогда при

$$\begin{cases} \mu > 1, \text{ ряд } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится,} \\ \mu < 1, \text{ ряд } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится,} \\ \mu = 1, \text{ требуется дополнительный анализ.} \end{cases}$$

- ***Признак Гаусса.*** Пусть $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, ε — некоторая постоянная и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

  Тогда

  1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$.
  2. Если $\lambda = 1$, то ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leqslant 1$.

- ***Признак Лейбница.*** Пусть $q_n \geqslant 0$ и $q_{n+1} \leqslant q_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_n$ сходится, а кроме того верна оценка

$$|S - S_n| \leqslant q_{n+1},$$

  где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k q_k$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

- ***Признак Дирихле.*** Пусть выполнены следующие условия:

  1. Последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничена, т.е.
  $$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant M.$$
  2. Последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к 0 при $n \to \infty$.

  Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

- ***Признак Абеля.*** Пусть выполнены следующие условия:

  1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
  2. Последовательность $\{b_n\}$ является монотонной и ограниченной.

  Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

12.2 Специальные признаки сходимости

- ***Логарифмический признак.*** Пусть $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если
$$\exists \alpha > 0 : \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha \text{ при } n \geqslant n_0,$$
и расходится, если
$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1 \text{ при } n \geqslant n_0.$$

- ***Признак Куммера.*** Пусть $a_n > 0$, $c_n \geqslant 0$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится. Пусть также существует предел
$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) = q.$$
Тогда при $q > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q < 0$ — расходится.

- ***Признак Бертрана.*** Пусть $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Если существует
$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = q,$$
то при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q < 1$ — расходится.

- ***Признак Ермакова.*** Пусть функция $f(x) > 0$ монотонно убывает при $x \geqslant 1$. Если существует
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = q,$$
то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

13 Функциональные последовательности и ряды

13.1 Признаки сходимости рядов

- ***Признак Вейерштрасса.*** Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве $\mathbb{E}$, если существует мажорирующий его сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. выполнено
$$\forall x \in \mathbb{E},\, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |u_n(x)| \leqslant a_n.$$

- ***Признак Дирихле.*** Пусть выполнены следующие условия:

  1. Частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ равномерно ограничены на $\mathbb{E}$.

  2. Для $\forall x_0 \in \mathbb{E}$ числовая последовательность $\{b_n(x_0)\}$ монотонна, и $\{b_n(x)\} \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} 0$.

  Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows}$.

- ***Признак Абеля.*** Пусть выполнены следующие условия:

  1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows}$.
  2. Числовая последовательность $\{b_n(x_0)\}$ монотонна $\forall x_0 \in \mathbb{E}$, и $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на $\mathbb{E}$.

  Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows}$.

- ***Признак Дини.*** Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ функция $u_n(x)$ непрерывна на некотором компакте K и $\forall x \in \mathrm{K} \Rightarrow u_n(x) \geqslant 0$. Пусть также ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к непрерывной функции $S(x)$. Тогда сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ к $S(x)$ на K — равномерная.

14 Степенные ряды

14.1 Основные теоремы

- **Радиус сходимости** степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ может быть вычислен по формулам:
$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

-

Теорема 91.11 (***Первая теорема Абеля***). *Если степенной ряд* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится в некоторой точке* $x_0 \neq 0$*, то он сходится абсолютно на множестве* $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < |x_0|\}$ *и* $S(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} S(x)$.

- Внутри общего интервала сходимости $|x - x_0| < R$ справедливо:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)'_x = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n,$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C.$$

- **Теорема 91.12** (***Вторая теорема Абеля***). *Пусть* R *— радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *и* $S(x)$ *— его сумма на* $(-R, R)$*. Тогда, если ряд сходится в точке* $x = R$ *(*$x = -R$*), то его сумма является непрерывной функцией в точке* $x = R$ *(*$x = -R$*), т.е.:*

$$\lim_{x \to R - 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \left(\lim_{x \to -R + 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\right).$$

14.2 Разложения в ряд Тейлора

- $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ R = +\infty.$$

- $$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \ R = +\infty.$$

- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ R = +\infty.$$

- $$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \ R = 1.$$

- $$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ R = 1.$$

- $$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n,\ R=1.$$

- $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},\ R=1.$$

- $$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ R=1.$$

- $$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1},\ R=1.$$

- $$\operatorname{sh} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ R=+\infty.$$

- $$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ R=+\infty.$$

- $$\operatorname{arsh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1},\ R=1.$$

- $$\operatorname{arth} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ R=+\infty.$$

15 Кратные интегралы

15.1 Замена переменных

15.1.1 Двумерный случай

Пусть $F = \begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{cases}$ — отображение открытого измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на открытое измеримое множество $G^* \subset \mathbb{R}^2_{xy}$, такое что:

1. F взаимно однозначно отображает G на G^*.

2. $F = \{x(u,v), y(u,v)\}$ непрерывно дифференцируемо.

3. Якобиан отличен от нуля:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Отметим, что если известна обратная зависимость $F^{-1} = \begin{cases} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{cases}$, то можно вычислить обратный якобиан

$$J^{-1} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Очень часто полезен переход к *полярным координатам*:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

где $r \geqslant 0$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. При этом $|J| = r$. Также могут оказаться полезными *обобщенные полярные координаты*:

$$x = ar\cos^\alpha\varphi,$$
$$y = br\sin^\alpha\varphi,$$

где $a, b > 0$, а $J = ab\alpha r \sin^{\alpha-1}\varphi \cdot \cos^{\alpha-1}\varphi$.

15.1.2 Трехмерный случай

Пусть ограниченная кубируемая замкнутая область V пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область Ω пространства $O'xyz$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u,v,w),$$
$$y = y(u,v,w),$$
$$z = z(u,v,w),$$

причем якобиан $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ при $(u,v,w) \in \Omega$ сохраняет постоянный знак (за исключением, может быть, множества меры нуль), тогда справедлива формула замены переменных:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

Опять-таки, если известна обратная зависимость

$$u = u(x,y,z),$$
$$v = v(x,y,z),$$
$$w = w(x,y,z),$$

то можно вычислить обратный якобиан как $J^{-1} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$. Чаще всего используются следующие замены переменных:

- *Цилиндрическая система координат*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= h, \\ |J| &= r, \end{aligned}$$

 где $r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

- *Сферическая система координат*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\psi, \\ y &= r\sin\varphi\cos\psi, \\ z &= r\sin\psi, \\ |J| &= r^2\cos\psi, \end{aligned}$$

 где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

- *Обобщенная сферическая система координат*

$$\begin{aligned} &x = ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi, \\ &y = br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi, \\ &z = cr\sin^{\beta}\psi, \\ &J = abc\alpha\beta r^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi. \end{aligned}$$

15.2 Несобственные интегралы

Предположим, что нужно исследовать сходимость интеграла

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dxdy, \tag{1}$$

где последовательность $\{D_n\}$ монотонно исчерпывает неограниченную область D, или же интеграла вида

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to0+0}\iint\limits_{D\setminus\mathrm{U}_\varepsilon(P)} f(x,y)\,dxdy, \tag{2}$$

где $f(x,y)$ не ограничена в окрестности точки P (в любой части области $D\setminus\{P\}$ предполагаем функцию интегрируемой в собственном смысле).

Тогда по аналогии с одномерным случаем можно исследовать на сходимость следующим образом.

Теорема 91.13. *Пусть вблизи точки $P(x_0,y_0)$ (бесконечно удаленной точки) имеет место равенство $f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{r^\alpha}$, где $\exists M,m>0 : m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$ и $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Тогда*

1. *При $\alpha<2$ ($\alpha>2$) интеграл (2) (интеграл (1)) сходится.*
2. *При $\alpha\geqslant2$ ($\alpha\leqslant2$) расходится.*

16 Интегралы, зависящие от параметра

16.1 Классические ИЗП

- ***Формула Фруллани.*** Для любых $a > 0$, $b > 0$, непрерывной $f(x)$ и при условии, что интеграл $\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ имеет смысл при любом $\delta > 0$, справедливо

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

- ***Интеграл Дирихле***

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha.$$

- ***Интеграл Эйлера.*** При $0 < \alpha < 1$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

- ***Интеграл Пуассона***

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- ***Интегралы Лапласа.*** При $\beta \neq 0$ и любых α:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2|\beta|} e^{-|\alpha\beta|}.$$

  При любых α, β:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{-|\alpha\beta|}.$$

- ***Интегралы Френеля***

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

16.2 Пример вычислений

Начнем с определенного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Введем параметр t и функцию от t:

$$I(t)=\int_0^1 \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\,dx.$$

Заметим, что искомый интеграл равен $I(1)$. Теперь, пользуясь теоремой 66.3, продифференцируем

$$I'(t)=\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+tx)(1+x^2)}.$$

Обратите внимание, что дифференцирование идет именно по параметру t. Получившийся интеграл легко берется разложением в сумму рациональных дробей, в результате чего получится

$$I'(t)=\left(\frac{-2\ln(1+tx)+2t\operatorname{arctg}(x)+\ln(x^2+1)}{2t^2+2}\right)\Big|_0^1=-\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}+\frac{\ln 2}{2+2t^2}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{t}{1+t^2}.$$

Теперь нужно вернуться к $I(t)$. Для этого проинтегрируем по t левую и правую части равенства:

$$I(t)=-\int \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt+\frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg} t+\frac{\pi}{8}\ln(1+t^2)+C.$$

Константа C, выходящая после взятия *неопределенного интеграла* очень важна. Вообще говоря, многие трудности при применении метода связаны с ее нахождением (не говоря о введении подходящего параметра). Иногда приходится придумывать другую параметризацию, потому что не удается отыскать константу C (что будет продемонстрировано в следующем примере).

Вспомним теперь, что

$$\int \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt=\int_0^t \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx,$$

$$I(t)=-\int_0^t \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx+\frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg} t+\frac{\pi}{8}\ln(1+t^2)+C.$$

Заметим, что указанное равенство должно выполняться для всех t, удовлетворяющих условию теоремы 66.3, в частности при $t=0$, получаем:

$$\begin{aligned} I(0)&=C,\\ 0&=C. \end{aligned}$$

Таким образом, константу мы нашли. Теперь осталось найти $I(1)$, т.е. ответ на задачу

$$\begin{aligned} I(1) &= -I(1) + \frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi\ln 2}{8}, \\ 2I(1) &= \frac{\pi\ln 2}{4}, \\ \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx &= \frac{\pi\ln 2}{8}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим чуть более хитрый пример:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx \text{ при } \alpha > 0.$$

Нетрудно показать, что выполняются все условия теоремы 68.2. Несмотря на то, что параметр в подынтегральной функции присутствует, использовать его неудобно, т.к. не получится выразить в конце константу C. Вместо этого введем еще один параметр:

$$I(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin\beta x\,dx.$$

При $\beta = 1$ имеем искомый интеграл. Теперь продифференцируем, а получившиеся интеграл возьмем с помощью формулы интегрирования по частям для несобственных интегралов:

$$\begin{aligned} I'(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,d(\sin\beta x) = \\ = \frac{1}{\beta}\left(\lim_{x\to+\infty}(e^{-\alpha x}\sin\beta x) - e^{-\alpha\cdot 0}\sin\beta\cdot 0 + \alpha\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx\right) = \\ = -\frac{\alpha}{\beta^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,d(\cos\beta x) = -\frac{\alpha}{\beta^2}\left(-1 + \alpha\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx\right). \end{aligned}$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) I'(\beta) &= \frac{\alpha}{\beta^2}, \\ I'(\beta) &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство

$$I(\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + C.$$

Вот для этого и нужен был параметр β. Теперь мы можем подставить $\beta = 0$ и легко найти C:

$$\begin{aligned} I(0) &= C, \\ 0 &= C. \end{aligned}$$

Теперь, подставляя $\beta = 1$:

$$I(1) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x \, dx = \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}.$$

17 Криволинейные интегралы

17.1 Первого рода

Пусть $f(x, y, z)$ непрерывна в точках гладкой кривой C:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (t_1 < t < t_2), \\ z = z(t), \end{cases}$$

а функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны на $[t_1, t_2]$. Обозначим

$$dS = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \text{ — дифференциал дуги } C.$$

Тогда

$$\int\limits_C f(x, y, z) \, dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt.$$

В частности, длину дуги AB можно вычислить как $\int\limits_{AB} dS$.

17.2 Второго рода

Пусть функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны в точках указанной выше кривой C, пробегаемой в направлении возрастания параметра t. Тогда

$$\int\limits_C P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) \, dt.$$

17.3 Формула Грина

Пусть C — замкнутый, кусочно-гладкий контур без самопересечений, ограничивающий односвязную область S (на плоскости), пробегаемый так, что область S остается слева, а функции $P(x, y), Q(x, y)$, $P'_y(x, y), Q'_x(x, y)$ непрерывны на $S \cup C$. Тогда

$$\oint\limits_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \iint\limits_S (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) \, dxdy.$$

Соответствено, площадь области, ограниченной простым замкнутым кусочно-гладким контуром C, равна

$$S = \oint\limits_C x \, dy = -\oint\limits_C y \, dx = \frac{1}{2} \oint\limits_C x \, dy - y \, dx.$$

Если существует такая функция $u(x, y)$, что $du = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ в некоторой области S, то для любой кривой $AB \subset S$ выполнено

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = u(B) - u(A),$$

иными словами — криволинейный интеграл второго рода в этом случае не зависит от выбора пути интегрирования. Обычно вид функции u неизвестен, но если выполнено $Q'_x = P'_y$, то этого достаточно для независимости КЛИ второго рода от пути интегрирования. В этом случае удобно брать в качестве пути ломаную, состоящую из двух отрезков, параллельных осям координат:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)\,dy.$$

Сама формула Грина выражает циркуляцию вектора $\{P, Q\}$ по замкнутому контуру C через двойной интеграл.

18 Поверхностные интегралы

18.1 Первого рода

Пусть уравнение поверхности S задано параметрически в виде $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где $(u, v) \in \Omega$, а Ω — ограниченная замкнутая квадрируемая область, в которой функции x, y, z непрерывно дифференцируемы. Пусть функция f непрерывна на S, а сама S — кусочно-гладкая двусторонняя поверхность. Тогда справедливо

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2}\,dudv,$$

где

$$\begin{aligned} E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \\ G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2, \\ F &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v. \end{aligned}$$

Площадь поверхности S при этом можно вычислять как

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

В частности, если уравнение поверхности S имеет вид $z = z(x, y)$, где $(x, y) \in \Omega$, то

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{\Omega} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy.$$

А площадь поверхности S можно вычислить как

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy.$$

18.2 Второго рода

Пусть S — кусочно-гладкая двусторонняя поверхность, S^+ — ее сторона, характеризуемая направлением нормали $\bar{\eta} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Если на S заданы непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, то поверхностный интеграл второго рода сводится к таковому первого рода

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Если поверхность S задана параметрически как $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то направляющие косинусы определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},$$
$$B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},$$
$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u, \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

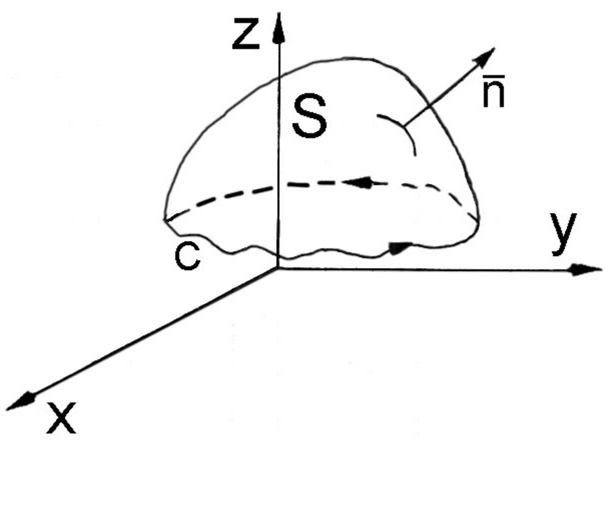
При этом знаки у косинусов определяются, исходя из области, по которой производится интегрирование, а именно — по направлению вектора нормали. Поэтому при интегрировании нужно разбивать поверхность на участки с одинаковыми знаками у косинусов.

Сам вектор нормали, если потребуется, к поверхности $S = \{\{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\} = \bar{r}(u, v)\}$ может быть вычислен по формуле

$$\bar{\eta} = \frac{[\bar{r}_u \times \bar{r}_v]}{|[\bar{r}_u \times \bar{r}_v]|}.$$

18.3 Формула Стокса

Пусть S — ориентированная кусочно-гладкая поверхность, ограниченная положительно ориентированным контуром C (как на рисунке), а $\bar{\eta} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — вектор единичной нормали, а функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в области $G \supset S$. Тогда выполняется



$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S ((R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iint_S (R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx + (Q'_x - P'_y)\,dxdy.$$

Формула Стокса, как и формула Грина, выражает циркуляцию вектора $\{P, Q, R\}$ по замкнутому контуру C, но уже в трехмерном пространстве.

18.4 Формула Остроградского-Гаусса

Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ — область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S. И пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ вместе со своими частными производными непрерывны в области $V \cup S$. Тогда

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dxdydz,$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности S. Формула выражает поток векторного поля $\{P, Q, R\}$ через поверхность S, стоящий в левой части формулы, через тройной интеграл.

19 Ряды Фурье

Здесь в максимально сжатой форме приведены основные сведения из теории рядов Фурье.

19.1 Разложение функции на $[-\pi, \pi]$

Теорема 91.14. *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi, \pi]$, причем все ее точки разрыва x_0 регулярны, т.е.*

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)),$$

то $f(x)$ на этом отрезке может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Если f — четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Если же f — нечетная, то тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Это следует из четности/нечетности косинуса/синуса.

Теорема 91.15. *Пусть f непрерывна, а ее производная кусочно-непрерывна на $[-\pi, \pi]$. Пусть также выполнено $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на $[-\pi, \pi]$.*

Теорема 91.16. *Пусть $f \in \mathrm{C}^m[-\pi, \pi]$ и $f(\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi), \ldots, f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi)$. Пусть также f имеет на $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывную производную порядка $m + 1$. Тогда ряд Фурье такой функции можно m раз почленно дифференцировать на $[-\pi, \pi]$, причем сумма этого ряда будет равна $f^{(m)}(x)$.*

Теорема 91.17. *Ряд интегрируемой по Риману функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$ можно интегрировать почленно на этом отрезке.*

Отметим, что иногда требуется так называемое *разложение по синусам/косинусам кратных дуг* на не симметричном отрезке, например, $[0, \pi]$. В этом случае нас интересует часть ряда Фурье, состоящая только из синусов/косинусов. Для этого поступают следующим образом. Продолжим функцию по четности (для разложения по косинусам кратных дуг) или по нечетности (для синусов) на $[-\pi, 0]$. В результате получим четную или нечетную на $[-\pi, \pi]$ функцию, для которой выше приведены упрощенные формулы разложения, содержащие только синус или косинус. Найденное разложение и будем ответом.

19.2 Разложение функции на $[-l, l]$

На самом деле все описанное выше верно и для произвольного отрезка $[-l, l]$ (во всех теоремах нужно просто заменить π на l и $-\pi$ на $-l$). Единственное, что в этом случае используется другой тригонометрический ряд Фурье. А именно, используется система функций

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, \ldots\right\}.$$

А разложение приобретает вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

19.3 Комплексная форма записи ряда Фурье

Из обычного тригонометрического ряда Фурье можно вывести его комплексный вариант, где $f(x)$ разложена по функциям $\{e^{ikx}\}$. Данный вывод читатель может изучить в основной части издания. *Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме* выглядит следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

Опять-таки, то же самое разложение можно написать и для произвольного отрезка $[-l, l]$. В этом случае

$$c_k = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{\frac{-i\pi kt}{l}}\, dt,$$

а ряд становится равен

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{i\pi kx}{l}}.$$

Отметим, что иногда полезно использовать комплексную форму. Например, если нужно разложить в ряд Фурье функцию, зависящую от $\sin x$ и $\cos x$, то иногда имеет смысл воспользоваться формулами

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

После чего сделать замену $z = e^{ix}$ и разложить в ряд Фурье функцию от z и z^{-1}, а затем вернуться обратно к x, используя формулу Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

20 Интеграл Фурье

Теорема 91.18. *Пусть выполнены условия:*

- $f(x)$ *определена всюду на* $\mathbb{R}$.
- $f(x)$ *и* $f'(x)$ *кусочно-непрерывны на любом промежутке.*
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *сходится.*

Тогда во всех своих точках непрерывности f *допускает представление в форме интеграла Фурье:*

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} (a(\lambda)\cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi,$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi.$$

В этой теореме в точках разрыва $f(x)$ заменяется на $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$. Отметим, что если f — четная, то

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda,$$

а если f — нечетная, то

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda.$$

На практике *интегралом Фурье* обычно называют формулу

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) \, d\xi.$$

Или же ее комплексную форму:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(\xi - x)} \, d\xi.$$

21 Преобразование Фурье

21.1 Определение

Преобразование Фурье интегрируемой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется формулой

$$F[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} \, dx.$$

Обратное преобразование Фурье задается как

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi.$$

Следует заметить, что в данных определениях несобственные интегралы понимаются **в смысле главного значения**.

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[0, +\infty)$. Тогда можно определить *косинус-преобразование Фурье* как

$$F_c[f](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x \, dx.$$

Аналогично можно определить *синус-преобразование Фурье* как

$$F_s[f](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin \xi x \, dx.$$

Будем говорить, что в точке x_0 выполнены *условия Дини*, если $\exists h > 0$ такое, что сходятся интегралы

$$\int\limits_0^h \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u} \, du \text{ и } \int\limits_0^h \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{u} \, du.$$

Теорема 91.19. *Пусть $f(x)$ непрерывна и интегрируема на $[0, +\infty)$ и для любой точки $x_0 \in [0, +\infty)$ выполнены условия Дини. Тогда имеет место формула обращения косинус-преобразования Фурье:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} F_c[f](\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda.$$

А если $f(0) = 0$, то и формула обращения синус-преобразования Фурье:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} F_s[f](\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda \text{ для } x \in [0, +\infty).$$

Если же $f(0) = 0$, то эта формула справедлива для $x \in (0, +\infty)$.

21.2 Основные свойства

- $F[f(ax)](\xi) = \frac{1}{a} F[f(x)]\left(\frac{\xi}{a}\right)$.
- $F[f(x)e^{iax}](\xi) = F[f(x)](\xi - a)$.
- $F[f(x-b)](\xi) = F[f(x)](\xi)e^{-i\xi b}$.
- Пусть $f(x)$ интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$, а для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнены условия Дини. Тогда
$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$
- Пусть $f(x)$ интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда $F[f](\xi)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.
- Пусть функция $f(x)$ k раз непрерывно дифференцируема и интегрируема со всеми своими производными на $\mathbb{R}$. Тогда
$$(F[f^{(k)}(x)])(\xi) = (i\xi)^k F[f(x)](\xi).$$

- Преобразование Фурье свертки двух интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций

$$f_1 * f_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\, dt$$

есть произведение преобразований Фурье этих функций, т.е.

$$F[f_1 * f_2](\xi) = F[f_1](\xi) \cdot F[f_2](\xi).$$

- Если f_1 и f_2 интегрируемы на $\mathbb{R}$, то справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[f_1(x)](\xi) f_2(\xi)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[f_2(x)](\xi) f_1(\xi)\, d\xi.$$